



מתמטיקה שכבת י – 3 יח"ל חוברת תרגול

תיכון אוסטרובסקי
רעננה

מבוא

חוברת זו היא חוברת תרגול לרמת בגרות של 3 יח"ל מתמטיקה. החוברת מכילה את החלק הראשון הנדרש בבחינות הבגרות בשאלונים 035381 ו-035382

בחוברת זו הסברים תאורטיים קצרים, כך שעיקר חומר הלימוד התאורטי מועבר בכיתה על ידי המורה למתמטיקה.

החוברת כוללת נושאים בטריגונומטריה, בגיאומטריה אנליטית ובחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

החוברת נכתבה ע"י מורי תיכון אוסטרובסקי ברעננה: אפי כהן, יעל גבע וענת לאופר.

בנוסף, בעריכה ובהגהה השתתפו המורים:

סיגל כהן – רוזן, אלכס אוסון, רוחלה קרמר, יונה דולצ'ה ויובל מלישקביץ.

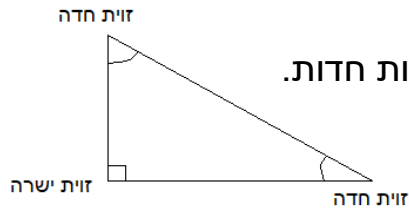
תוכן עניינים

5	טריגונומטריה
5	משולש ישר זווית
6	הפונקציות הטריגונומטריות – במשולש ישר זווית
6	הפונקציה הטריגונומטרית סינוס – Sin
8	הפונקציה הטריגונומטרית קוסינוס – COS
11	הפונקציה הטריגונומטרית טנגנס – tan
13	קטעים מיוחדים - משולש ישר זווית
13	גובה
14	חוצה זווית
14	תיכון
15	קטעים מיוחדים במשולש ישר זווית - תרגול נוסף
18	משולש שווה שוקיים
20	משולש שווה צלעות
20	משולש קהה זווית
21	מלבן
24	מעוין
26	טרפז
28	ריבוע
31	גאומטריה אנליטית
32	שטחים של צורות גאומטריות במערכת הצירים
32	שטחים של צורות גאומטריות
32	תרגילים – מציאת שטחים
34	משוואת הישר
34	משמעות השיפוע m
35	מציאת נקודות חיתוך של ישר עם הצירים
36	שרטוט ישר במערכת הצירים
36	כיצד נמצא שיעור נקודה הנמצאת על ישר נתון ושיעור אחד שלה חסר ?
36	כיצד נקבע האם נקודה נמצאת על ישר נתון או לא ?
37	מציאת נקודת חיתוך בין שני ישרים
40	מציאת שיפוע של ישר העובר דרך שתי נקודות נתונות
40	מציאת משוואת ישר עפ"י שתי נקודות נתונות
41	מציאת משוואת ישר עפ"י שיפוע ונקודה הנמצאת עליו
43	ישרים מקבילים
46	אמצע קטע
48	תרגילים – אמצע קטע
51	מרחק בין שתי נקודות
52	תרגילים – מרחק בין שתי נקודות
55	ישרים מאונכים

58	תרגילים – ישרים מאונכים
63	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
63	נגזרת של פונקציה
63	תרגילים
64	משוואת משיק
65	תרגילים
65	מציאת משוואת משיק כאשר שיעור ה- y של נקודת ההשקה נתון
65	תרגילים
65	מציאת משוואת משיק כאשר שיפוע המשיק נתון
65	תרגילים
66	כללי גזירה נוספים
66	תרגילים
67	משוואת משיק – שימוש בכללי גזירה נוספים
67	תרגילים – מציאת משוואת המשיק כאשר נתון שיעור ה- x של נקודת ההשקה
68	מציאת משוואת המשיק כאשר נתון שיעור ה- y של נקודת ההשקה
68	תרגילים
69	מציאת משוואת המשיק כאשר נתון שיפוע המשיק
69	תרגילים
70	סיכום – מציאת משוואת משיק
71	תרגילים מכל הסוגים במציאת משוואת משיק
73	הזווית שבין המשיק לכיוון החיובי עם ציר ה- x
75	תרגילים
76	נקודות מינימום ומקסימום מקומיים
78	תרגילים
79	מציאת תחומי עליה וירידה – פרבולה
80	תרגילים
81	שרטוט פרבולה
83	תרגילים
86	מציאת נקודות קיצון - פולינום
89	תרגילים
90	חקירה מלאה של פולינום
92	תרגילים
95	בעיות קיצון
97	תרגילים

טריגונומטריה

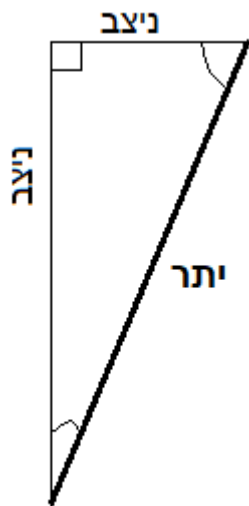
משולש ישר זווית



משולש ישר זווית הוא משולש עם זווית ישרה ושתי זוויות חדות.

זווית ישרה היא זווית בת 90° (מעלות).

זווית חדה היא זווית שגודלה בין 0° ל 90° .



יתר הוא שמה של הצלע המונחת מול הזווית הישרה.

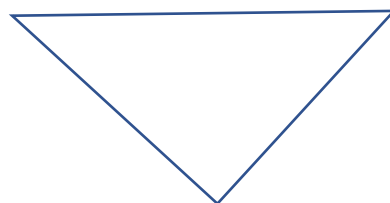
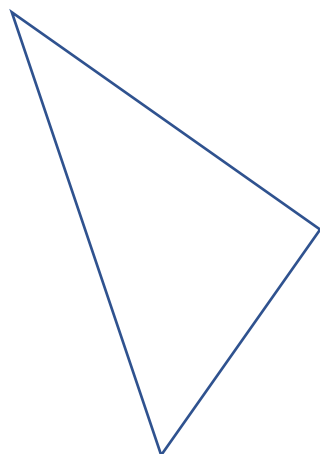
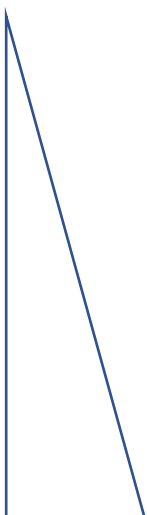
ניצב הוא השם של הצלעות הניצבות זו לזו

ובכך יוצרות את הזווית הישרה.

תרגול:

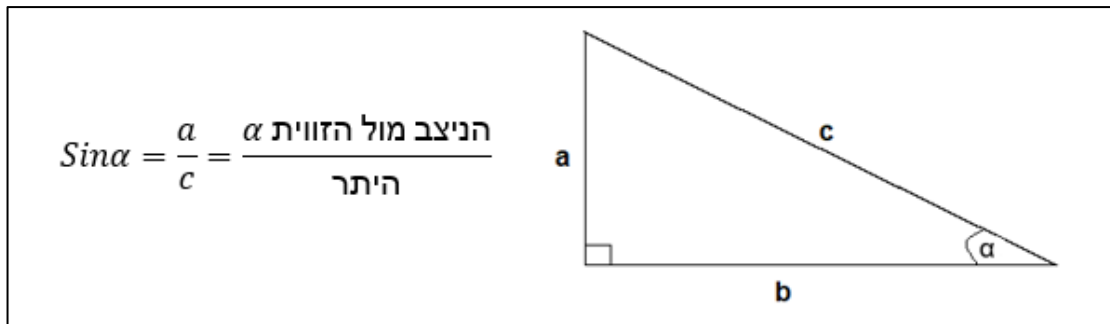
במשולשים הבאים יש לרשום ליד כל זווית את הסוג שלה - **חדה/ישרה**

ולרשום ליד כל צלע האם היא **ניצב או יתר**.



הפונקציות הטריגונומטריות – במשולש ישר זווית

הפונקציה הטריגונומטרית סינוס – Sin
סינוס הזווית החדה שווה ליחס בין הניצב מול הזווית לבין היתר.



מציאת אורך היתר

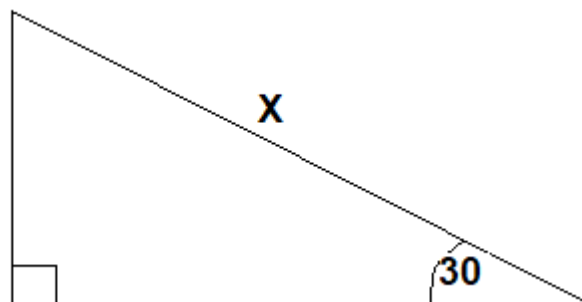
דוגמה:

$$\sin 30 = \frac{22.5}{x}$$

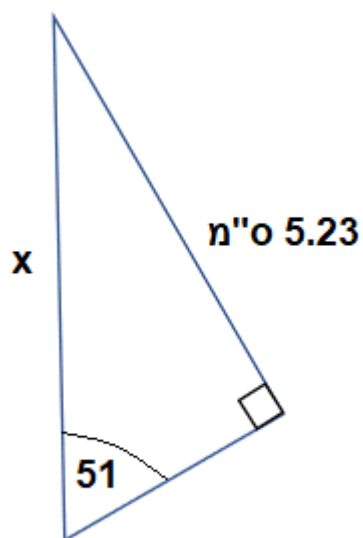
$$x = \frac{22.5}{\sin 30}$$

$$x = 45 \text{ n"o}$$

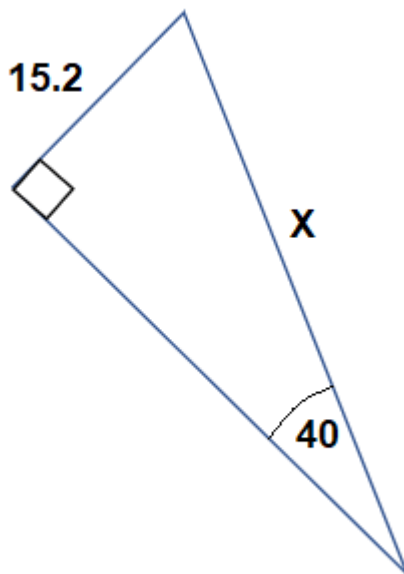
22.5 n"o



מצא את x :



15.2 n"o

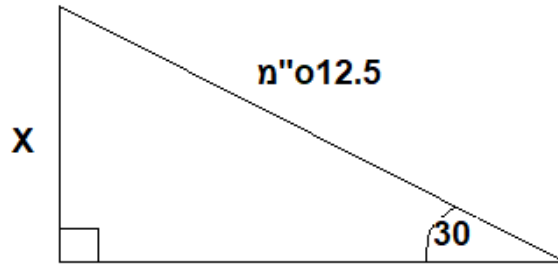


מציאת אורך הניצב

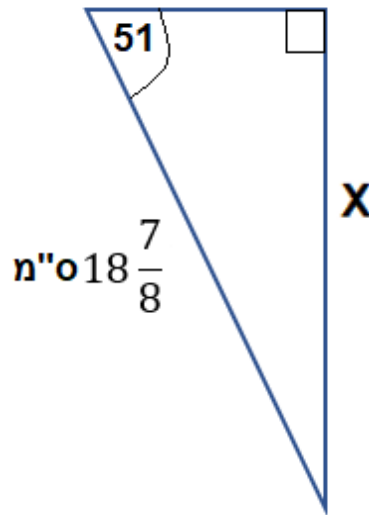
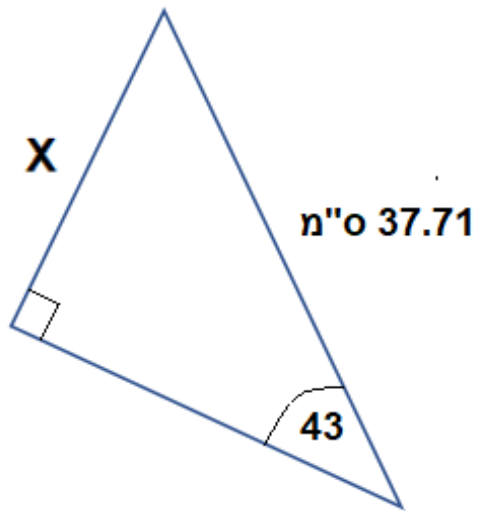
$$\sin 30 = \frac{x}{12.5}$$

$$12.5 \times \sin 30 = x$$

$$x = 6.25 \text{ n"o}$$



מצא את x :



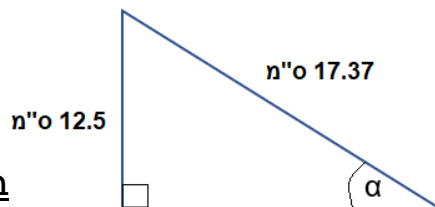
מציאת גודל הזווית החדה α

$$\sin \alpha = \frac{12.5}{17.37}$$

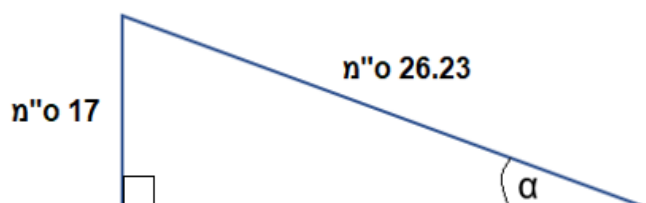
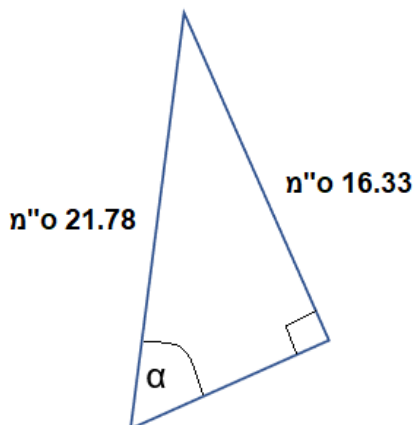
$$\sin \alpha = 0.7196$$

$$\text{SHIFT} \Rightarrow \sin \Rightarrow 0.7196 \Rightarrow = \text{במחשבון:}$$

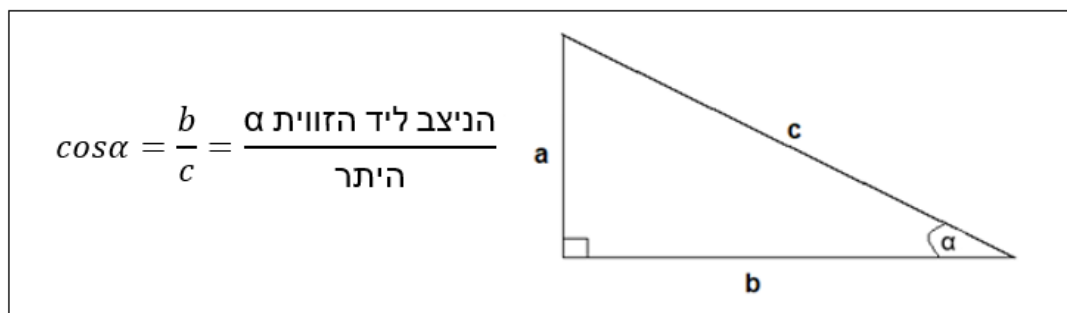
$$\alpha = 46.02^\circ$$



מצא את גודל הזווית α :



הפונקציה הטריגונומטרית קוסינוס – COS
קוסינוס הזווית החדה שווה ליחס בין הניצב ליד הזווית לבין היתר.



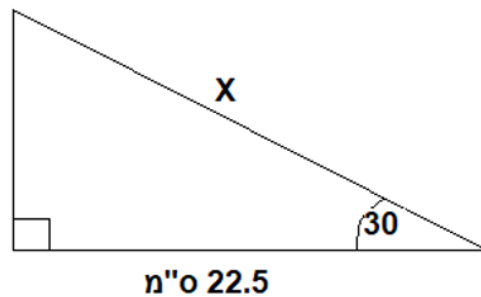
מציאת אורך היתר

דוגמה:

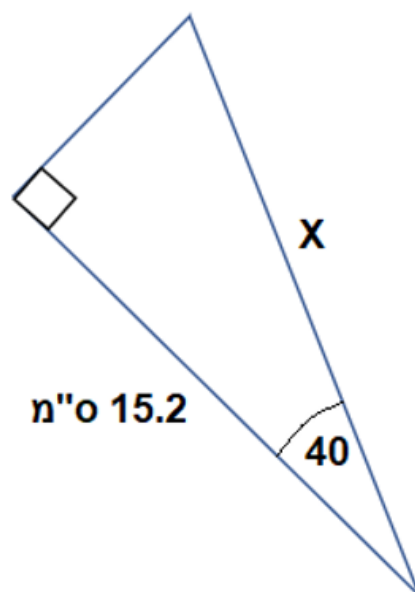
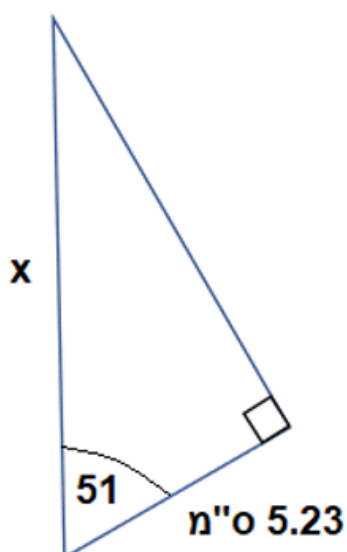
$$\cos 30 = \frac{22.5}{x}$$

$$x = \frac{22.5}{\cos 30}$$

$$x = 25.98 \text{ n"o}$$



מצא את x :

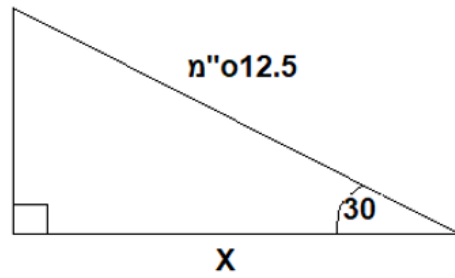


מציאת אורך הניצב

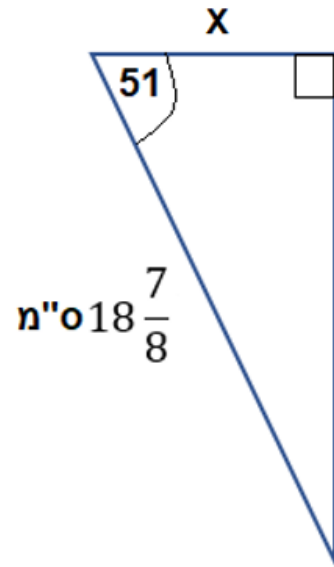
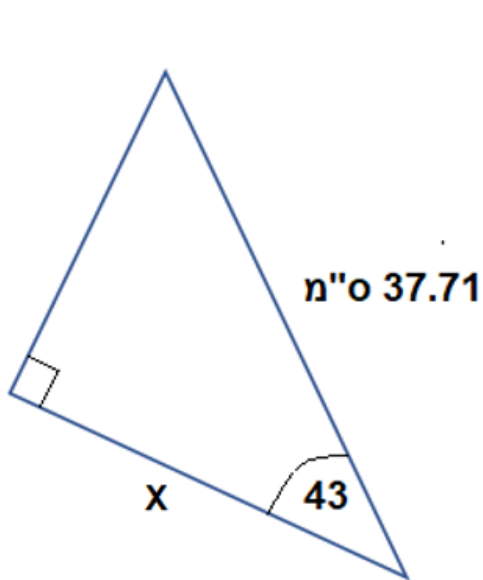
$$\cos 30 = \frac{x}{12.5}$$

$$12.5 \times \cos 30 = x$$

$$x = 10.83 \text{ m}$$



מצא את x:



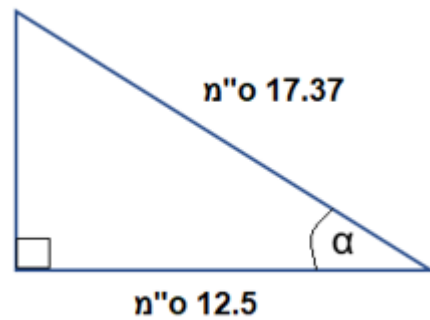
מציאת גודל הזווית החדה α:

$$\cos \alpha = \frac{12.5}{17.37}$$

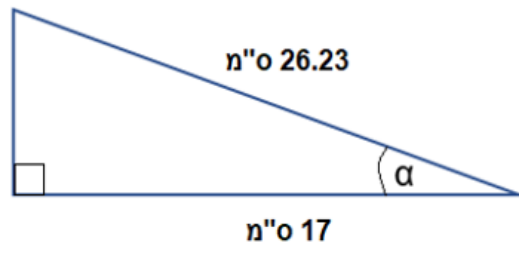
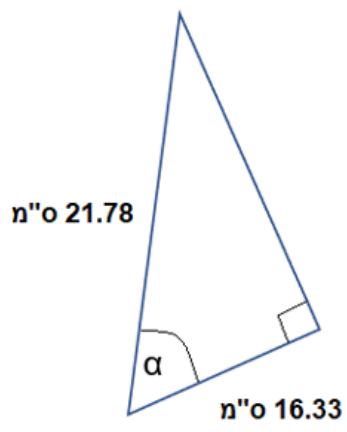
$$\cos \alpha = 0.7196$$

SHIFT=>COS=>0.7196=>= במחשבון:

$$\alpha = 43.98^\circ$$



מצא את גודל הזווית α:



הפונקציה הטריגונומטרית טנגנס – $\tan$
 טנגנס הזווית החדה שווה ליחס בין הניצב **מול** הזווית לבין הניצב **ליד** הזווית.

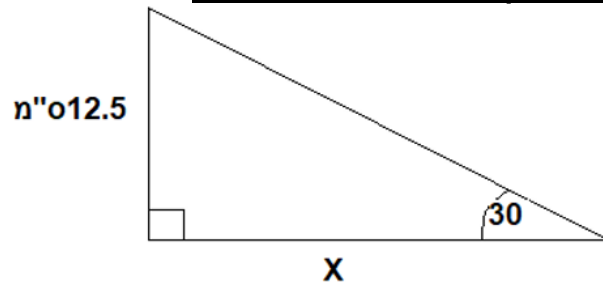


מציאת אורך הניצב ליד הזווית:

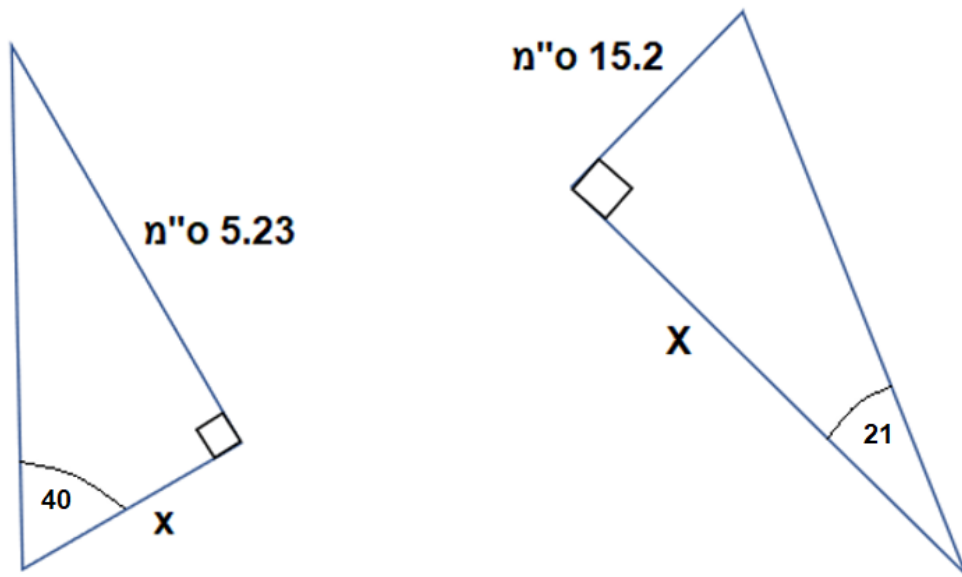
$$\tan 30 = \frac{12.5}{x}$$

$$x = \frac{12.5}{\tan 30}$$

$$x = 21.65 \text{ מ"ס}$$



מצא את x:

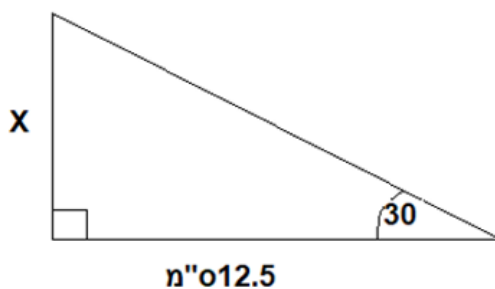


מציאת אורך הניצב מול הזווית:

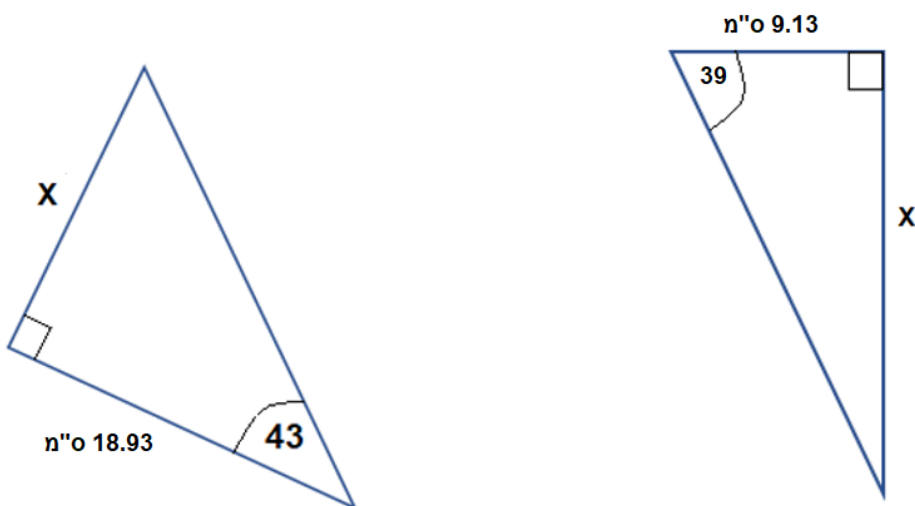
$$\tan 30 = \frac{x}{12.5}$$

$$12.5 \cdot \tan 30 = x$$

$$x = 7.22 \text{ מ"ר}$$



מצא את x:



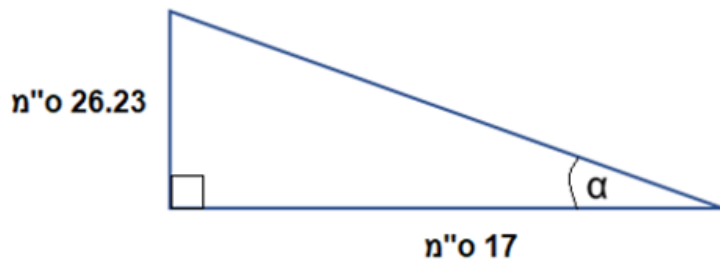
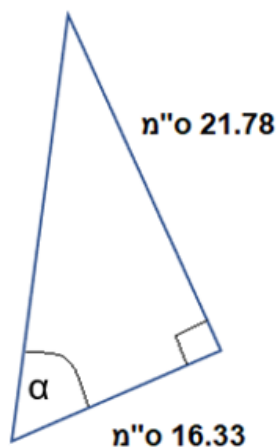
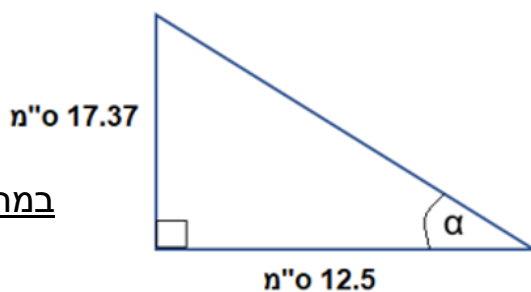
מציאת גודל הזווית החדה α:

$$\tan \alpha = \frac{17.37}{12.5}$$

$$\tan \alpha = 1.3896$$

SHIFT=>tan=>1.3896=>= במחשבון:

$$\alpha = 54.26^\circ$$



הערה:

החל מעמוד זה התרגילים הם תרגילי מאגר (801 ו-802) כפי שמפורסמים באתר משרד החינוך.

קטעים מיוחדים - משולש ישר זווית

גובה

גובה הוא אנך היוצא מקודקוד אל הצלע מולו.

שני הניצבים במשולש ישר זווית מהווים גובה אחד כלפי השני.

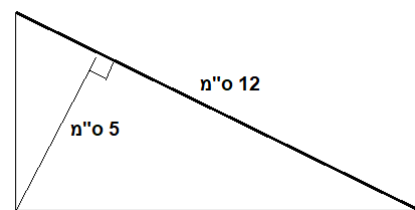
גובה ליתר במשולש ישר זווית יצא כאנך מקודקוד הזווית הישרה אל היתר.

בעזרת הגובה במשולש ניתן לחשב את **שטח** המשולש.

חישוב שטח משולש – צלע כפול גובה אל הצלע חלקי שתיים.

$$S = \frac{12 \times 5}{2}$$

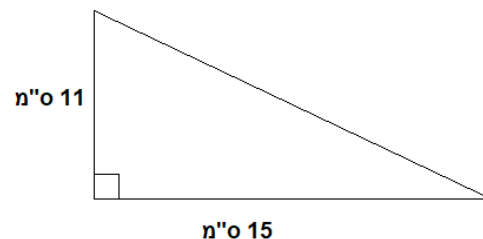
$$s = 30 \text{ סמ}^2$$



ועבור משולש ישר זווית ניתן לחשב שטח גם כמכפלת הניצבים חלקי שתיים (כיוון שהניצבים מהווים גובה אחד כלפי השני).

$$S = \frac{11 \times 15}{2}$$

$$s = 82.5 \text{ סמ}^2$$



תרגיל 8 – מאגר 801

במשולש ישר-זווית ABC ($\angle BAC = 90^\circ$), AD הוא הגובה ליתר.

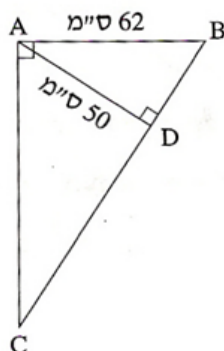
נתון: $AD = 50$ ס"מ, $AB = 62$ ס"מ (ראו סרטוט).

א. חשבו את גודל הזווית ABD .

ב. חשבו את אורך הניצב AC .

ג. חשבו את שטח המשולש ABC .

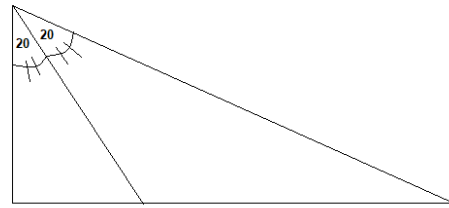
ד. חשבו את אורך היתר BC .



(א) 53.75° (ב) 84.56 ס"מ (ג) 2621.34 סמ"ר (ד) 104.85°

חוצה זווית

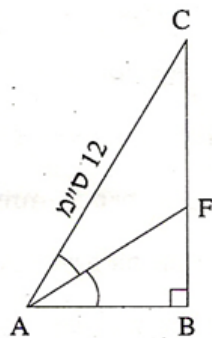
חוצה זווית הוא ישר העובר דרך קודקוד הזווית וחוצה אותה לשתי זוויות השוות זו לזו.



תרגיל 6 – מאגר 801

במשולש ישר-זווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$), AF הוא חוצה-הזווית BAC .

נתון: $\angle BAC = 54^\circ$, $AC = 12$ ס"מ (ראו סרטוט).



א. חשבו את אורך הניצב AB .

ב. חשבו את אורך הקטע BF .

ג. חשבו את אורך הקטע FC .

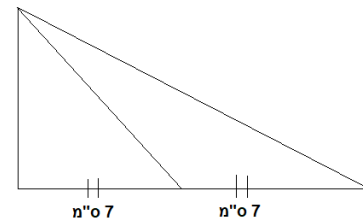
ד. חשבו את אורך חוצה-הזווית AF .

ה. חשבו את השטח של המשולש CFA .

(א) 7.053 ס"מ (ב) 3.594 ס"מ (ג) 6.114 ס"מ (ד) 7.916 ס"מ (ה) 21.56 סמ"ר

תיכון

תיכון במשולש הוא קטע המחבר את קודקוד המשולש עם אמצע הצלע שמולו.



תרגיל 7 – מאגר 801

במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$),

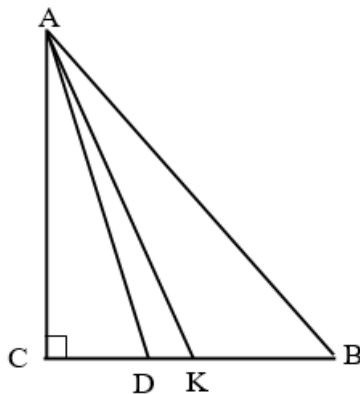
אורכי הניצבים הם: $AC = 9.7$ ס"מ, $BC = 7.7$ ס"מ.

א. חשבו את אורך AD , אם נתון כי AD

הוא החוצה-זווית BAC .

ב. חשבו את אורך AK , אם נתון כי AK

הוא תיכון לצלע BC .



(א) 10.273 ס"מ (ב) 10.436 ס"מ

קטעים מיוחדים במשולש ישר זווית - תרגול נוסף

תרגיל 5 – מאגר 801 הערה: חישוב היקף משולש – סכום אורכי צלעות המשולש.

במשולש ישר-זווית ABC ($\angle ACB = 90^\circ$), אורך הניצב AC הוא 3 ס"מ

(ראו סרטוט). שטח המשולש הוא 6 סמ"ר.

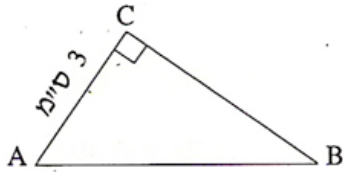
א. חשבו את אורך BC .

ב. מצאו את $\tan \angle CAB$.

ג. חשבו את גודל הזווית CAB .

ד. חשבו את היקף המשולש.

(א) 4 (ב) $\frac{4}{3}$ (ג) 53.13° (ד) 12 ס"מ



תרגיל 13 – מאגר 801

במשולש ישר-זווית EFG ($\angle F = 90^\circ$), D היא נקודה על הצלע EF .

נתון: $ED = 3$ ס"מ, $DF = 9$ ס"מ, $\angle GDF = 35^\circ$ (ראו סרטוט).

א. חשבו את שטח המשולש GDF .

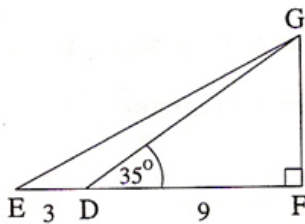
ב. רשמו ביטוי טריגונומטרי המבטא את היחס

בין הקטעים GF ו- EF .

ג. פי כמה גדול שטח המשולש GDF משטח

המשולש GDE ? הסבירו את תשובתכם.

ד. חשבו את גודל הזווית $\angle GED$.



(א) 28.358 סמ"ר (ב) $\tan \angle GEF = \frac{GF}{EF}$ (ג) פי 3 (ד) 27.699°

תרגיל 32 – מאגר 801

במשולש הישר-זווית ABC , אורך הניצב AB הוא 3 מ', ואורך הניצב

AC הוא 60 ס"מ.

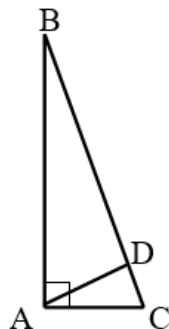
א. מצאו את $\tan \angle ABC$.

ב. חשבו את גודל הזווית $\angle ABC$.

ג. חשבו את אורך היתר BC .

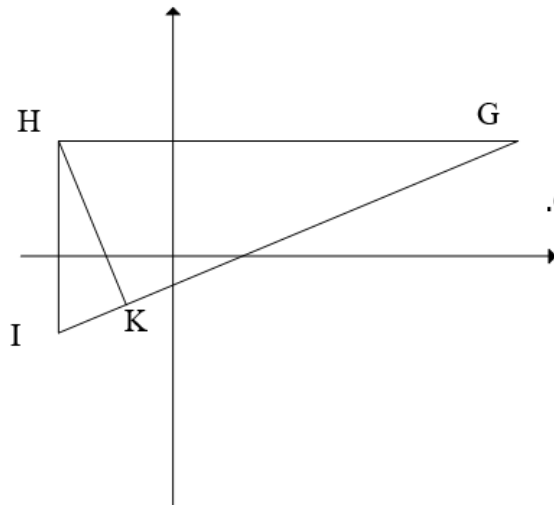
ד. חשבו את שטח המשולש.

ה. חשבו את אורך הגובה ליתר של המשולש.



(א) 0.2 (ב) 11.31° (ג) 305.9 ס"מ (ד) 9000 סמ"ר או 0.9 מ"ר (ה) 58.84 ס"מ

תרגיל 38 – מאגר 801



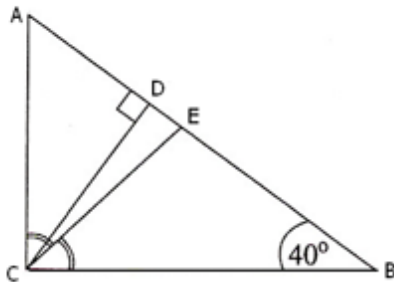
הנקודות $I(-3, -2)$, $H(-3, 3)$, $G(9, 3)$ הן שלושת הקדקודים של משולש. HK הוא הגובה לצלע GI.

- חשבו את גודל הזווית $\angle HGI$.
- חשבו את אורך הגובה HK.
- חשבו את גודל הזווית $\angle IHK$.

(א) 22.62° (ב) 4.615 יח' (ג) 22.62°

תרגיל 3 – מאגר 802

במשולש ישר-זווית ABC ($\angle ACB = 90^\circ$), $\angle CBA = 40^\circ$ (ראו סרטוט).



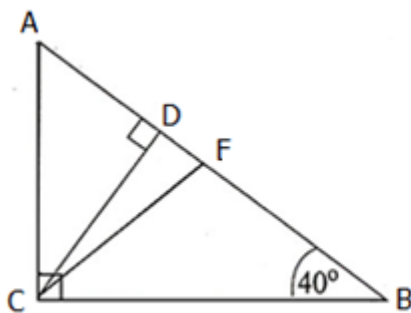
- אורך הגובה ליתר CD הוא 7 ס"מ.
- CE הוא חוצה-הזווית הישרה במשולש.
- חשבו את הזווית $\angle CED$.
- מהו שטח המשולש CED?

(א) 85° (ב) 2.14 סמ"ר

תרגיל 4 – מאגר 802

במשולש ישר-זווית ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) $\angle CBA = 40^\circ$.

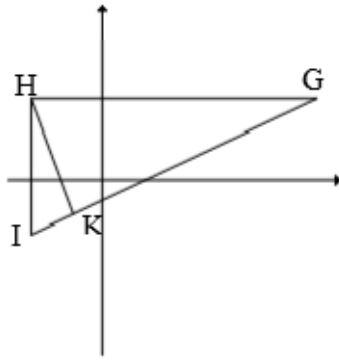
אורך הניצב מול זווית זו הוא 7 ס"מ $AC = 7$ (ראו סרטוט). CF הוא תיכון ליתר, ו-CD הוא הגובה ליתר.



- חשבו את אורך היתר AB.
- חשבו את אורך הקטע CD.
- חשבו את אורך הקטע AD.
- מהו שטח המשולש CDF.

(א) 10.89 ס"מ (ב) 5.36 ס"מ (ג) 4.5 ס"מ (ד) 2.53 סמ"ר

תרגיל 25 – מאגר 802



הנקודות $H(-3,3)$, $G(9,3)$, $I(-3,-2)$ הן שלושת הקדקודים של משולש.

HK הוא הגובה לצלע GI (ראו סרטוט).

א. (1) מצאו את זוויות המשולש HGI

(2) חשבו את היחס בין אורך הצלע IK, לבין אורך הגובה HK.

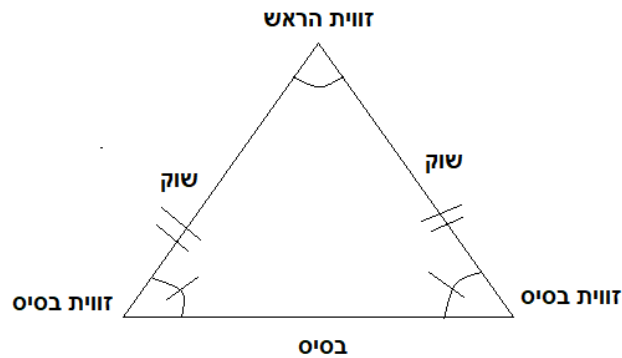
ב. (1) מצאו את זוויות המשולש HGK

(2) חשבו את היחס בין אורך הגובה HK לבין אורך הקטע KG.

(א) 67.38° , 90° , 22.62° (2) $5 : 12$ או $1 : 0.417$ או $1 : 2.4$

משולש שווה שוקיים

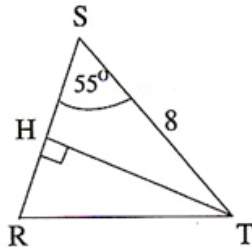
משולש שווה שוקיים הוא משולש ששתיים מצלעותיו שוות זו לזו.



תרגיל 15 – מאגר 801

במשולש שווה-שוקיים RST ($RS = RT$), TH הוא הגובה לשוק RS .

אורך הבסיס הוא 8 ס"מ ST . גודל זווית הבסיס הוא 55° .



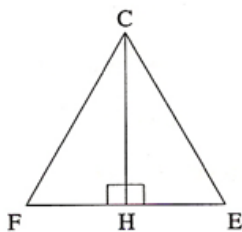
- חשבו את אורך TH .
- חשבו את האורך של שוק המשולש.
- חשבו את שטח המשולש RST .

(א) 6.553 ס"מ (ב) 6.974 ס"מ (ג) 22.85 סמ"ר

תרגיל 18 – מאגר 801

במשולש שווה-שוקיים FCE ($CF = CE$) (ראו סרטוט).

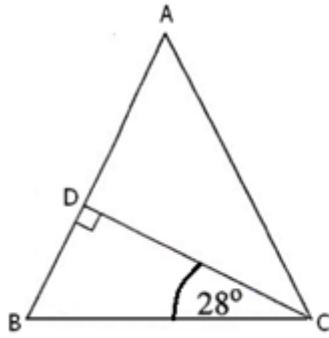
אורך הבסיס EF הוא 11 ס"מ. שטח המשולש הוא 70 סמ"ר.



- חשבו את אורך CH , הגובה לבסיס (ראו סרטוט).
- חשבו את גודל זווית הראש $\angle FCE$.

(א) 12.727 ס"מ (ב) 46.74°

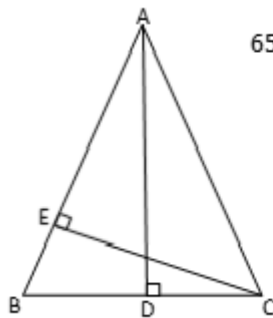
תרגיל 5 – מאגר 802



- במשולש שווה-שוקיים ABC ($AC=AB$), הגובה לשוק יוצר זווית של 28° עם בסיס המשולש. אורך הבסיס הוא 10 ס"מ.
- א. חשבו את זוויות המשולש ABC .
- ב. חשבו את היחס בין השוק AB לבסיס BC .

(א) $56^\circ, 62^\circ, 62^\circ$ (ב) $1.065 : 1$

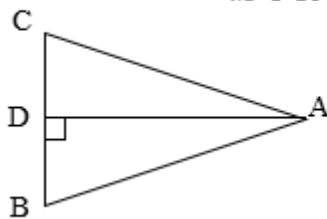
תרגיל 6 – מאגר 802



- במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$), זווית הבסיס היא 65° ואורך הגובה (AD) לבסיס (BC) הוא 10 ס"מ (ראו סרטוט).
- א. חשבו את אורך הבסיס BC .
- ב. מהו אורך הגובה לשוק (CE) מהו?

(א) 9.33 ס"מ (ב) 8.45 ס"מ.

תרגיל 7 – מאגר 802

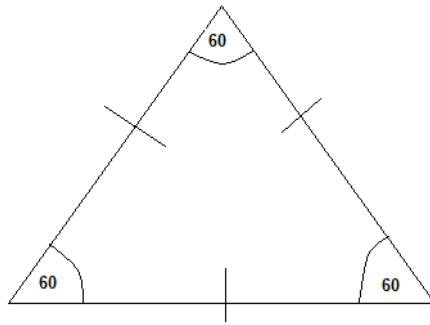


- במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$), אורך השוק (AB) הוא 10 ס"מ. הגובה לבסיס (AD) שווה ל- $\frac{4}{5}$ מאורך השוק (ראו סרטוט).
- חשבו את זוויות המשולש ABC .

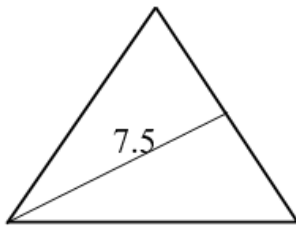
$53.13^\circ, 73.74^\circ$

משולש שווה צלעות

משולש שווה צלעות הוא משולש שכל צלעותיו שוות זו לזו, ולכן גם כל זוויותיו שוות זו לזו ובנות 60 מעלות.



תרגיל 17 – מאגר 801



במשולש שווה-צלעות אורך התיכון הוא 7.5 ס"מ.

- חשבו את אורך צלע המשולש.
- חשבו את היקף המשולש.
- מהו אורך החוצה-זווית במשולש? נמקו.

(א) 8.66 ס"מ (ב) 25.98 ס"מ (ג) 7.5 ס"מ , כי במשולש שווה-צלעות

התיכון הוא גם חוצה-זווית.

משולש קהה זווית

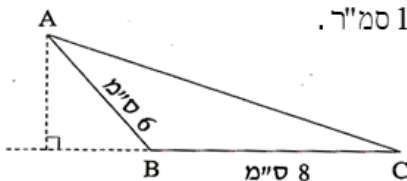
משולש קהה זווית הוא משולש בו אחת מהזוויות היא זווית קהה.

זווית קהה היא זווית שגודלה בין 90 ל 180 מעלות.

זווית ישרה היא בת 90 מעלות.

זווית חדה היא זווית שגודלה בין 0 ל 90 מעלות.

תרגיל 21 – מאגר 801



שטח המשולש הקהה-זווית ABC ($\angle ABC$ קהה), הוא 12 סמ"ר.

נתון: $BC = 8$ ס"מ, $AB = 6$ ס"מ (ראו סרטוט).

חשבו את גודל הזווית ABC.

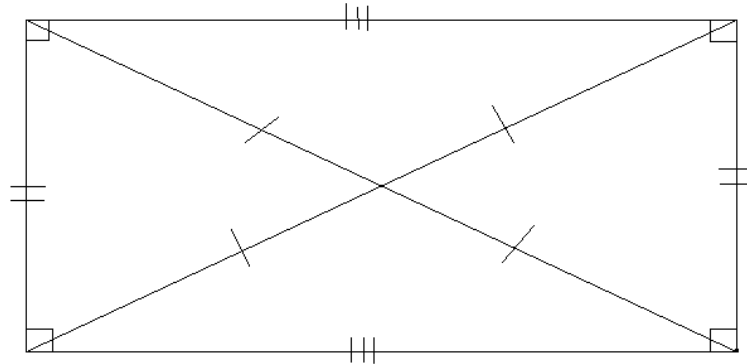
תשובה: 150°

מלבן

מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.

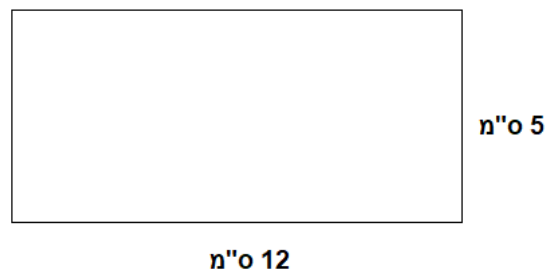
כל זוג צלעות נגדיות הן מקבילות ושוות זו לזו.

האלכסונים שווים וחוצים זה את זה (ואינם חוצים את זוויות המלבן).



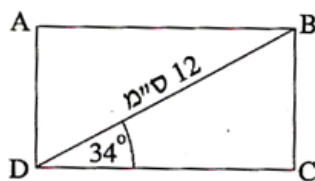
חישוב שטח מלבן – מכפלת צלעות סמוכות זו בזו.

$$s = 5 \times 12 = 60 \text{ סמ"ר}$$



תרגיל 22 – מאגר 801

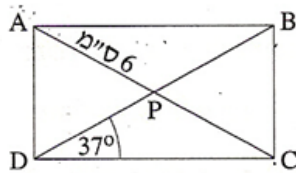
במלבן ABCD אורך האלכסון הוא 12 ס"מ, והזווית BDC היא בת 34° (ראו סרטוט).



- א. חשבו את צלעות המלבן BC ו-DC.
- ב. חשבו את היקף המלבן.
- ג. חשבו את שטח המלבן.
- ד. חשבו את הזווית החדה שבין אלכסוני המלבן.

(א) $BC = 6.710$ ס"מ $DC = 9.948$ ס"מ (ב) 33.316 ס"מ (ג) 66.75 סמ"ר (ד) 68°

תרגיל 26 – מאגר 801



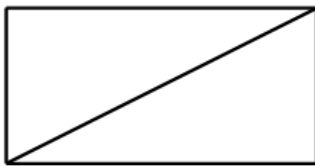
במלבן ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה P.
נתון: $\angle PDC = 37^\circ$, $AP = 6$ ס"מ (ראו סרטוט).

- חשבו את אורך האלכסון BD.
- חשבו את היקף המלבן.

(א) 12 ס"מ (ב) 33.61 ס"מ

תרגיל 34 – מאגר 801

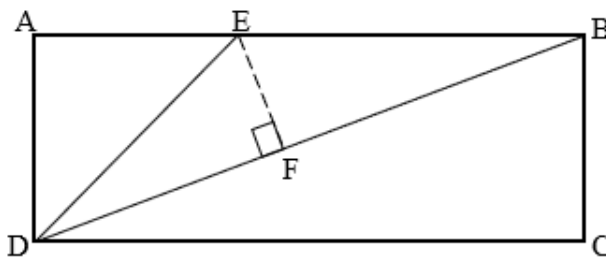
במלבן, אורך צלע אחת הוא 10 ס"מ, ואורך הצלע הארוכה גדול פי 4 ממנה.



- מהי הזווית שבין אלכסון המלבן לצלע הארוכה של המלבן?
- מהי הזווית שבין אלכסון המלבן לצלע הקצרה של המלבן?
- חשבו את גודל הזווית החדה שבין שני אלכסוני המלבן.
- חשבו את היחס בין הצלע הקצרה במלבן לאלכסון המלבן.
- מהו היחס בין הצלע הקצרה של המלבן להיקפו?

(א) 14.04° (ב) 75.96° (ג) 28.08° (ד) 0.24 או $1:\sqrt{17}$ (ה) 1:10

תרגיל 22 – מאגר 802

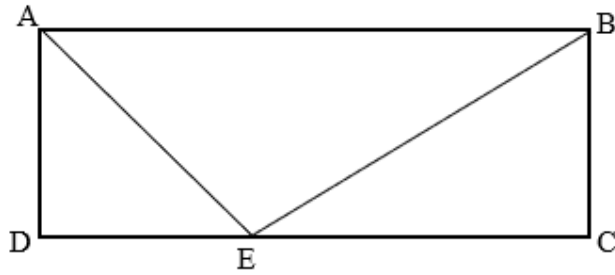


נתון מלבן ABCD, שאורכי צלעותיו הן:
 $AD = 8$ ס"מ, $AB = 22$ ס"מ.
BD הוא אחד מאלכסוני המלבן.
נקודה E נמצאת על הצלע AB, כך
שמשולש AED הוא משולש שווה-שוקיים.
א. מצאו את $\angle BDC$.

- חשבו את זווית המשולש DEB.
- חשבו את שטח המשולש DEB.
- חשבו את אורך אלכסון המלבן (BD).
- חשבו את הגובה (EF) לצלע BD במשולש DEB.

(א) 19.98° (ב) 135° , 25.02° , 19.98° (ג) 56 סמ"ר (ד) 23.41 ס"מ (ה) 4.78 ס"מ

תרגיל 23 – מאגר 802



נתון מלבן ABCD.

AE הוא חוצה-הזווית DAB.

שטחו של משולש ADE הוא 4.5 סמ"ר.

אורכו של הקטע EC הוא 4 ס"מ.

א. (1) חשבו את זוויות המשולש ADE.

(2) מצאו את אורכי צלעות המלבן ABCD.

ב. חשבו את זוויות המשולש BEC.

(א) (1) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (2) 3 ס"מ, 7 ס"מ (ב) $36.87^\circ, 53.13^\circ, 90^\circ$

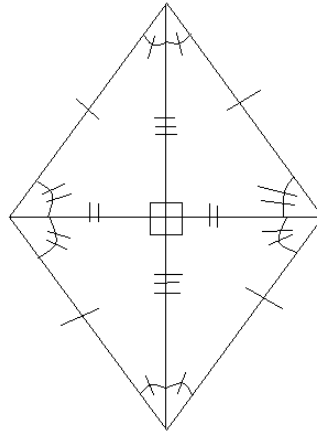
מעוין

מרובע שווה צלעות.

כל זוג צלעות נגדיות הן מקבילות זו לזו.

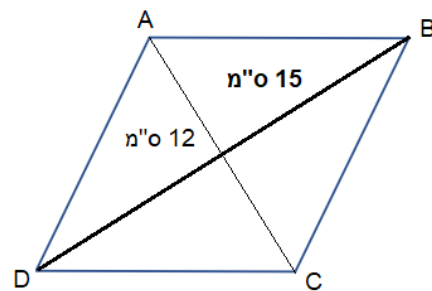
כל זוג זוויות נגדיות שוות זו לזו.

האלכסונים חוצים זה את זה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות המעוין (ואינם שווים זה לזה).



חישוב שטח מעוין – מכפלת האלכסונים חלקי שתיים.

$$S = \frac{15 \times 12}{2} = 90 \text{ סמ"ר}$$



תרגיל 29 – מאגר 801

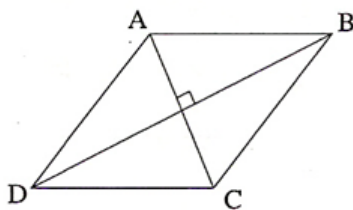
במעוין ABCD (ראו סרטוט),

אורכי האלכסונים הם: 8 ס"מ ו- 14 ס"מ.

א. חשבו את זוויות המעוין.

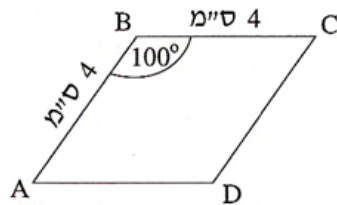
ב. חשבו את היקף המעוין.

ג. חשבו את שטחו של המעוין.



(א) 59.49° ; 120.51° (ב) 32.249 ס"מ (ג) 56 סמ"ר

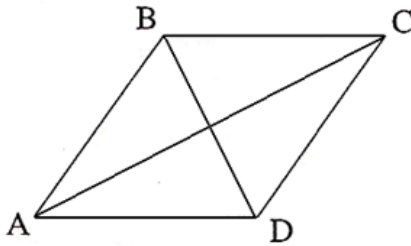
תרגיל 30 – מאגר 801



- במעוין ABCD אורך הצלע הוא 4 ס"מ ,
והזווית הקהה היא בת 100° (ראו סרטוט).
א. חשבו את אורך האלכסון AC ואת אורך האלכסון DB.
ב. חשבו את שטח המעוין ABCD.

(א) $AC = 6.128$ ס"מ ; $BD = 5.142$ ס"מ (ב) 15.757 סמ"ר

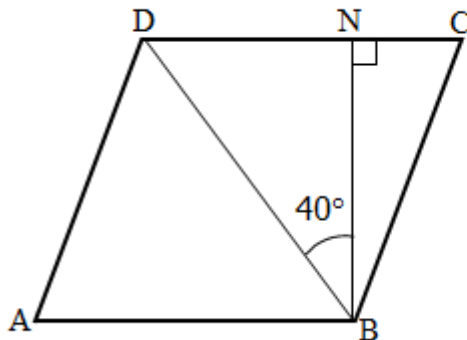
תרגיל 36 – מאגר 801



- האלכסון הקצר במעוין הוא 10 ס"מ. האלכסון הארוך
גדול מהאלכסון הקצר פי 2.4.
א. חשבו את זוויות המעוין.
ב. חשבו את היחס בין היקף המעוין לבין אורך האלכסון הקצר.

(א) 134.76° ; 45.24° (ב) 5 : 26 או 1 : 5.2 או 5.2

תרגיל 24 – מאגר 802

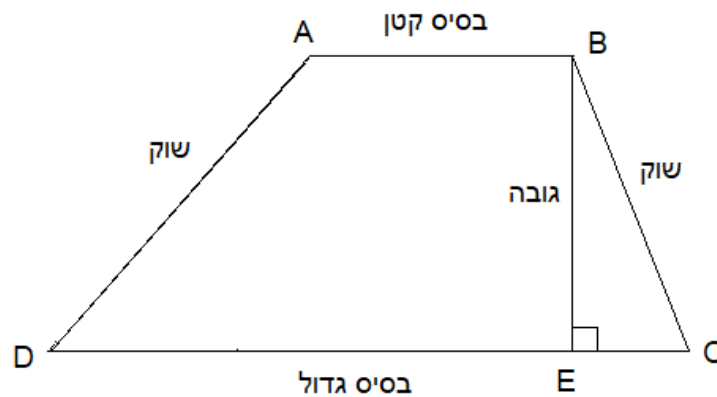


- נתון מעוין ABCD.
גובה המעוין, BN, שווה ל- 10 ס"מ.
אלכסון המעוין, BD, יוצר זווית של 40° עם
הגובה BN ($\angle DBN = 40^\circ$).
א. חשבו את אורך האלכסון BD.
ב. חשבו את זוויות המשולש BDC.
ג. חשבו את אורך הצלע של המעוין.

(א) 13.05 ס"מ (ב) 50° , 50° , 80° (ג) 10.15 ס"מ

טרפז

מרובע שבו רק זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.



$AB \parallel DC$ - בסיסי הטרפז מקבילים זה לזה.

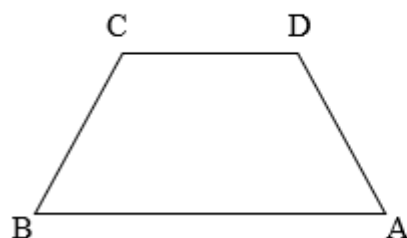
$AD \nparallel BC$ – שוקי הטרפז אינן מקבילות זו לזו.

ניתן להוריד גובה מהנקודות A או B אשר ישמש כניצב במשולש ישר זווית ($\triangle BEC$) וישמש כגובה בטרפז לחישוב שטח טרפז.

$$S = \frac{\text{גובה} \times \text{סכום הבסיסים}}{2} = \frac{(AB+DC) \times BE}{2} \quad \text{שטח טרפז}$$

תרגיל 10 – מאגר 802

בטרפז שווה-שוקים ($AB \parallel CD$), אורך הבסיס, CD, הוא 10 ס"מ (ראו סרטוט).



הבסיס AB גדול ב- 40% מהבסיס CD.

השוק AD קטנה ב- 10% מהבסיס CD.

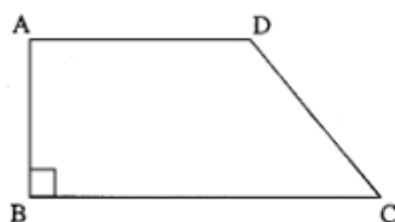
א. חשבו את אורך הבסיס AB

ב. חשבו את אורך השוק AD

ג. חשבו את הזווית החדה של הטרפז.

(א) 14 ס"מ (ב) 9 ס"מ (ג) 77.16°

תרגיל 13 – מאגר 802



בטרפז ישר זווית ABCD ($AD \parallel CB$, $\sphericalangle B = 90^\circ$) נתון:

$$AD = 10 \text{ ס"מ}$$

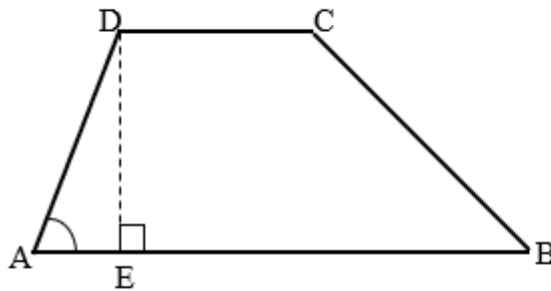
$$AB = 7 \text{ ס"מ}$$

$$\sphericalangle DCB = 36^\circ \quad (\text{ראו סרטוט}).$$

חשבו את שטח הטרפז.

103.72 סמ"ר

תרגיל 14 – מאגר 802



בטרפז ABCD ($AB \parallel CD$) נתון:

$AD = 6$ ס"מ , $DC = 4$ ס"מ ,

$\angle DAB = 75^\circ$, $CB = 17$ ס"מ .

DE הוא גובה הטרפז (ראו סרטוט).

א. מצאו את האורך של גובה הטרפז.

ב. מצאו את אורך הקטע AE.

ג. מצאו את גודל הזווית $\angle CBA$.

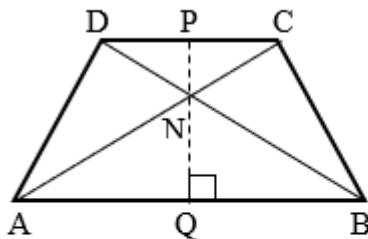
ד. מצאו את אורך הבסיס הגדול AB.

ה. חשבו את שטח הטרפז.

ו. מצאו את גודל הזווית $\angle DBA$.

(א) 5.8 ס"מ (ב) 1.55 ס"מ (ג) 19.95° (ד) 21.53 ס"מ (ה) 74.04 סמ"ר (ו) 16.19°

תרגיל 16 – מאגר 802



נתון טרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB \parallel CD$).

אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה N.

PQ הוא גובה הטרפז שעובר דרך הנקודה N (ראו סרטוט).

ידוע כי: $DN = NC = 7$ ס"מ ,

$AN = NB = 11$ ס"מ ,

$NQ = 8$ ס"מ (ראו סרטוט).

א. מצאו את זווית $\angle NAQ$.

ב. מצאו את אורך הקטע PN.

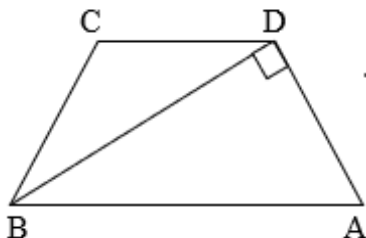
ג. מצאו את אורך הבסיס הגדול AB.

ד. מצאו את אורך הבסיס הקטן.

ה. חשבו את שטח הטרפז.

(א) 46.66° (ב) 5.09 ס"מ (ג) 15.1 ס"מ (ד) 9.61 ס"מ (ה) 161.73 סמ"ר

תרגיל 18 – מאגר 802



בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB \parallel CD$).

הזווית שליד הבסיס הגדול היא 72° , ואורך השוק הוא 13 ס"מ .

אלכסון הטרפז יוצר זווית ישרה עם השוק (ראו סרטוט).

א. חשבו את אורך הבסיס הגדול.

ב. חשבו את שטח המשולש ABD.

ג. חשבו את אורך הבסיס הקטן.

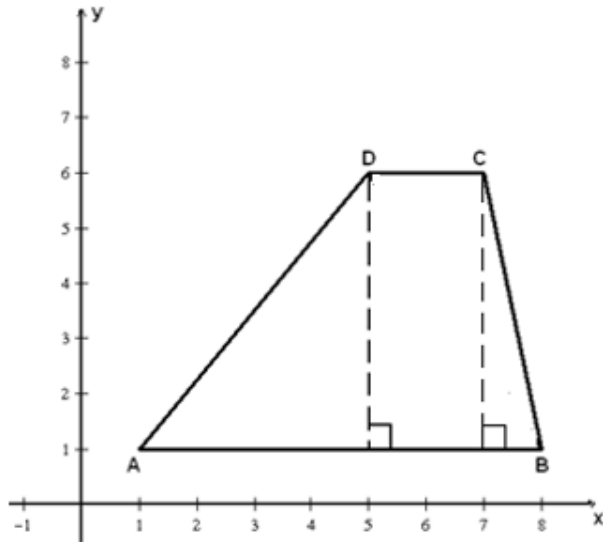
ד. חשבו את שטח הטרפז.

ה. חשבו את שטח המשולש BCD.

(א) 42.07 ס"מ (ב) 260.07 סמ"ר (ג) 34.04 ס"מ (ד) 470.36 סמ"ר (ה) 210.29 סמ"ר

תרגיל 27 – מאגר 802

במערכת צירים נתון טרפז ABCD, ששיעורי קדקודיו הם: $A(1,1)$, $B(8,1)$, $C(7,6)$, $D(5,6)$.
(ראו סרטוט).

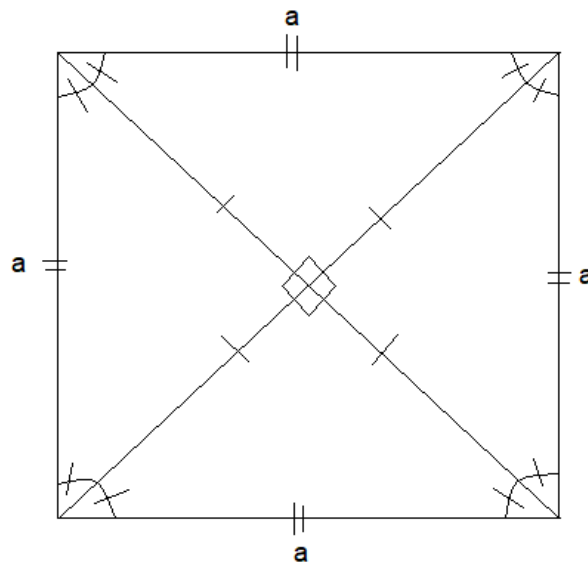


- חשבו את גובה הטרפז.
- חשבו את הזוויות החדות של הטרפז $(\angle CBA$ ו- $\angle DAB$).
- חשבו את שטח הטרפז ABCD.

(א) 5 יח' (ב) 51.34° , 78.69° (ג) 22.5 יח"ר

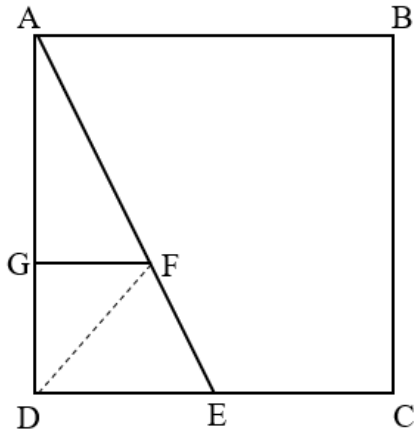
ריבוע

מרובע שכל צלעותיו שוות זו לזו וכל זוויותיו שוות זו לזו.
האלכסונים בריבוע שווים זה לזה, מאונכים זה לזה, חוצים זה את זה ואת הזוויות.



שטח ריבוע הוא מכפלת הצלעות. $S = a \times a = a^2$

תרגיל 19 – מאגר 802



נתון ריבוע ABCD שבו $AB = 10$ ס"מ.

E היא אמצע הקטע DC.

א. חשבו את זווית המשולש ADE.

ב. חשבו את אורך הקטע AE.

F היא נקודה על AE ו-G היא נקודה על AD,

כך ש: $GF \parallel DE$.

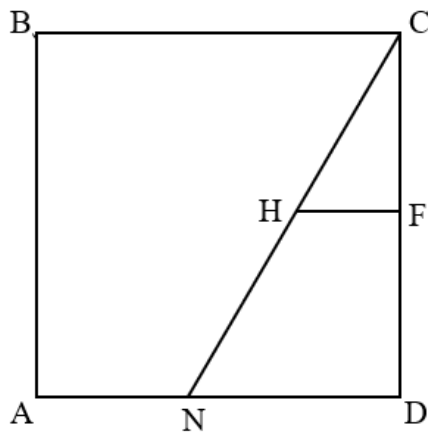
נתון: $GF = 3\frac{1}{3}$ ס"מ.

ג. חשבו את FE.

ד. חשבו את שטח המשולש DFE.

(א) 26.57° , 90° , 63.43° (ב) 11.18 ס"מ $\approx \sqrt{125}$ (ג) 3.73 ס"מ (ד) $8\frac{1}{3}$ סמ"ר

תרגיל 20 – מאגר 802



נתון ריבוע ABCD. צלע הריבוע שווה ל-9 ס"מ.

נקודה N נמצאת על הצלע AD כך ש- $AN = 4$ ס"מ.

א. חשבו את זווית המשולש CND.

F היא אמצע הצלע CD.

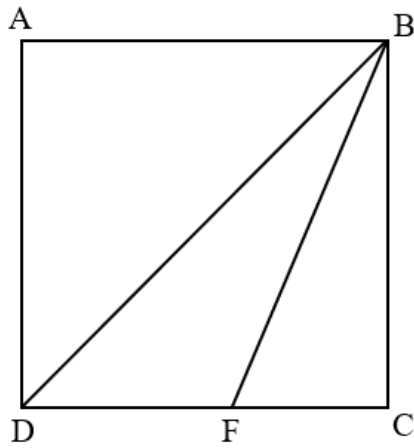
H היא נקודה על CN כך ש: $FH \parallel ND$.

ב. חשבו את HF.

ג. חשבו את NH.

(א) 29.05° , 90° , 60.95° (ב) 2.5 ס"מ (ג) 5.15 ס"מ

תרגיל 21 – מאגר 802



- נתון ריבוע ABCD.
 נקודה F נמצאת על הצלע DC.
 ידוע כי $FC = 4$ ס"מ.
 שטח המשולש BFC שווה ל- 20 סמ"ר (ראו סרטוט).
 א. מצאו את אורך צלע הריבוע.
 ב. מצאו את אורך אלכסון הריבוע (BD).
 ג. מצאו את זווית המשולש BFC.
 ד. מצאו את שטח המשולש BFD.

(א) 10 ס"מ (ב) 14.14 ס"מ (ג) 90° , 21.8° , 68.2° (ד) 30 סמ"ר

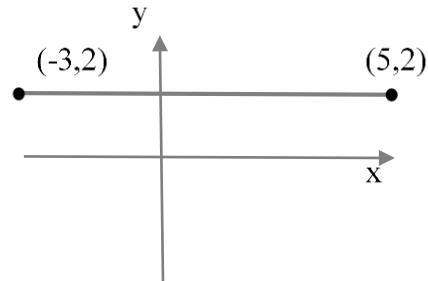
גאומטריה אנליטית

מציאת אורך של קטע המקביל לציר ה- x או לציר ה- y

כאשר נתונות שתי נקודות במערכת הצירים קל מאוד לחשב את אורך הקטע המחבר ביניהן אם הוא מקביל לאחד הצירים.

קטע המקביל לציר ה- x

דוגמה: מצא את המרחק בין הנקודות $(5,2)$ $(-3,2)$. (שימו לב: 2 הנקודות נמצאות באותו הגובה)

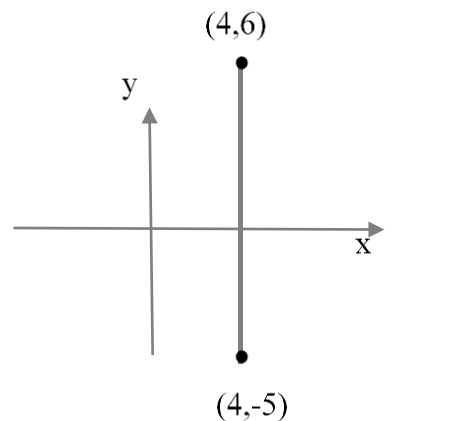


פתרון: המרחק בין הנקודות יהיה הפרש שיעורי ה- x של שתי הנקודות (גדול פחות קטן)

$$\text{כלומר: } 5 - (-3) = 8$$

קטע המקביל לציר ה- y

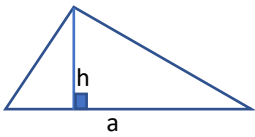
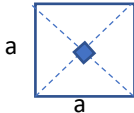
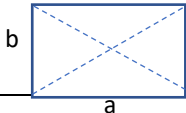
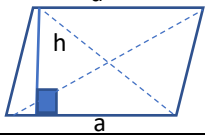
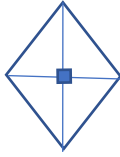
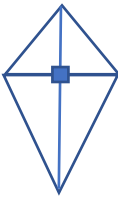
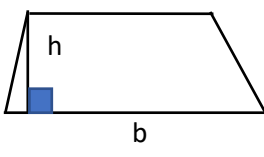
דוגמה: מצא את המרחק בין הנקודות $(4,6)$ $(4,-5)$. (שימו לב: 2 הנקודות נמצאות זו מעל זו)



פתרון: המרחק בין הנקודות יהיה הפרש שיעורי ה- y של שתי הנקודות (גדול פחות קטן)

$$\text{כלומר: } 6 - (-5) = 11$$

שטחים של צורות גאומטריות במערכת הצירים

שטח	תכונות	צורה
$S = \frac{a \cdot h}{2}$ הגובה לצלע a		משולש
$S = a \cdot a = a^2$ $S = \frac{\text{אלכסון 1} \cdot \text{אלכסון 2}}{2}$		ריבוע כל הצלעות שוות צלעות נגדיות מקבילות כל הזוויות שוות 90° האלכסונים שווים, חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה
$S = a \cdot b$		מלבן צלעות נגדיות מקבילות ושוות כל הזוויות שוות 90° האלכסונים שווים וחוצים זה את זה
$S = a \cdot h$ הגובה לצלע a		מקבילית צלעות נגדיות מקבילות ושוות האלכסונים חוצים זה את זה
$S = \frac{\text{אלכסון 1} \cdot \text{אלכסון 2}}{2}$		מעוין כל הצלעות שוות צלעות נגדיות מקבילות האלכסונים חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה
$S = \frac{\text{אלכסון 1} \cdot \text{אלכסון 2}}{2}$		דלתון דלתון מורכב משני משולשים שווים שוקיים האלכסונים מאונכים זה לזה
$S = \frac{(a + b)h}{2}$ a בסיס קטן b בסיס גדול h גובה הטרפז		טרפז זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות (נקראות בסיסים) וזוג שני של צלעות נגדיות שאינן מקבילות

* במשולש קהה זווית הגובה הוא חיצוני למשולש.

** במשולש ישר זווית נשתמש בניצב אחד כצלע ובניצב השני כגובה לאותה הצלע.

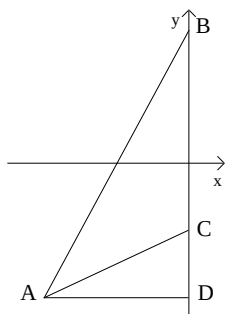
תרגילים – מציאת שטחים

1. חשב את המרחק בין הנקודות הבאות:

א. (2,1), (2,6) ג. (-1,-6), (5,-6)

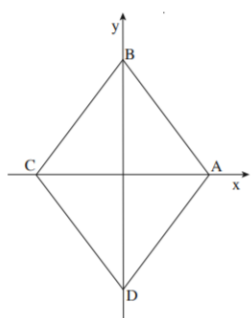
ב. (3,6), (3,-1) ד. (4,2), (3,2)

תשובות: א. 5 ב. 7 ג. 6 ד. 1



2. נתונות ארבע נקודות במערכת הצירים : $D(0, -4)$, $C(0, -2)$, $B(0, 4)$, $A(-4, -4)$
- חשב את שטח המשולש ACD.
 - חשב את שטח המשולש ABD.
 - חשב את שטח המשולש ABC.
- תשובות:** א. 4 יח"ר ב. 16 יח"ר ג. 12 יח"ר

3. הצלעות של מלבן ABCD מקבילות לצירים. נתונים הקדקודים $A(8, 10)$, $C(13, 22)$
- סמן את הנקודות במערכת הצירים
 - רשום את שיעורי הקדקודים B ו-D.
 - חשב את שטח המלבן.
- תשובות:** א. $D(13, 10)$, $B(8, 22)$ ב. 60 יח"ר



4. נתון מעוין שקדקודיו הם : $D(0, -4)$, $C(-3, 0)$, $B(0, 4)$, $A(3, 0)$
- חשב את שטח המשולש BDC.
 - חשב את שטח המעוין.
- תשובות:** א. 12 יח"ר ב. 24 יח"ר

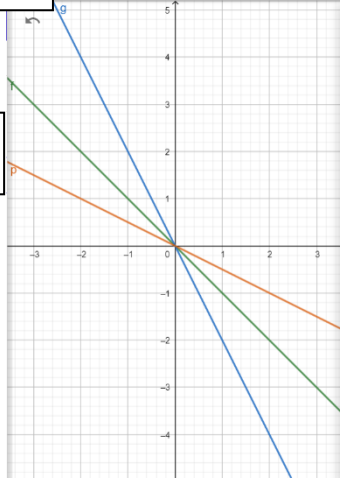
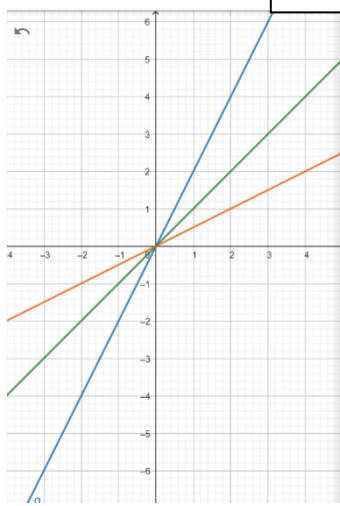
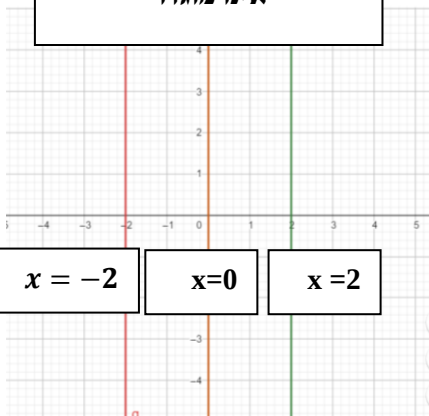
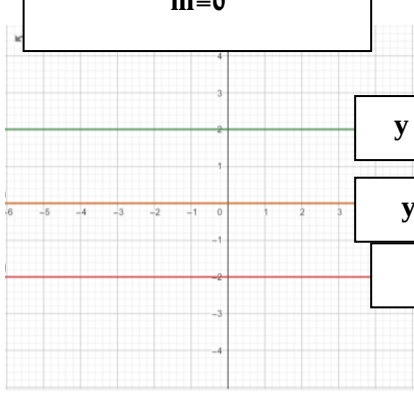
5. נתונה מקבילית ABCD. נתונים הנקודות : $A(0, 2)$, $B(3, 2)$, $C(2, 0)$
- סמן את הנקודות במערכת הצירים ומצא את שיעורי הקדקוד D.
 - חשב את שטח המקבילית שיצרת.
- תשובות:** א. $D(-1, 0)$ ב. 6 יח"ר

6. קדקודיו של טרפז ABCD הם : $A(-2, 2)$, $B(6, 2)$, $C(5, 7)$, $D(3, 7)$
- סמן את הנקודות במערכת הצירים וסרטט את הטרפז.
 - חשב את שטח הטרפז.
- תשובות:** 25 יח"ר

משמעות השיפוע m

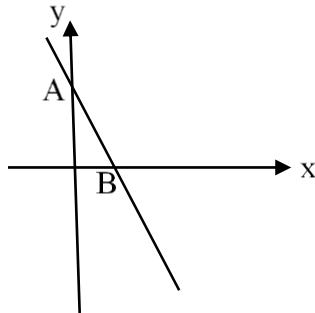
שיפוע הישר מוגדר כמידת העלייה בציר ה- y כאשר מתקדמים צעד אחד ימינה בציר ה- x . כלומר, השיפוע קובע את מידת התלילות של הישר. ככל שהישר יותר תלול כך שיפועו (בערך מוחלט) יותר גדול

נסווג את הישרים במערכת הצירים ל 4 סוגים עפ"י השיפוע שלהם

<u>ישר יורד</u> כאשר ערך ה- x גדל, ערך ה- y קטן שיפוע הישר שלילי $0 > m$ $y = -2x$ $y = -x$ $y = -\frac{1}{2}x$ 	<u>ישר עולה</u> כאשר ערך ה- x גדל, ערך ה- y גדל שיפוע הישר חיובי $0 < m$ $y = 2x$ $y = x$ $y = \frac{1}{2}x$ 
<u>ישר מקביל לציר ה- y</u> ערך x אינו גדל, ולכן לא ניתן להגדיר את שיפוע הישר שיפוע הישר אינו מוגדר  $x = -2$ $x = 0$ $x = 2$	<u>ישר מקביל לציר ה- x</u> כאשר ערך x גדל, ערך ה- y נשאר קבוע שיפוע הישר $m = 0$  $y = 2$ $y = 0$ $y = -2$

מציאת נקודות חיתוך של ישר עם הצירים

דוגמה: נתון הישר $y = -2x + 2$ מצא את נקודות החיתוך של הישר עם ציר y (נקודה A) ועם ציר x (נקודה B)



פתרון:

חיתוך על ציר ה- y

נקודה A – נמצאת על ציר ה- y ולכן שיעור ה- x שלה הוא 0 ($x=0$)

מכיוון ששיעורי הנקודה A מקיימים את משוואת הישר, נציב במשוואת הישר $x=0$ ונקבל את שיעור ה- y של A

$$y = -2 \cdot 0 + 2$$

$$y = 2$$

כלומר $A(0, 2)$

ניתן לראות כי:

המספר החופשי b במשוואת הישר הוא שיעור ה- y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y

חיתוך עם ציר ה- x

נקודה B – נמצאת על ציר ה- x ולכן שיעור ה- y שלה הוא 0 ($y=0$)

מכיוון ששיעורי הנקודה B מקיימים את משוואת הישר, נציב במשוואת הישר $y=0$ ונקבל את שיעור ה- x של B

$$0 = -2x + 2 \quad /-2$$

$$-2x = -2 \quad /:(-2)$$

$$x = 1$$

כלומר $B(1, 0)$

שרטוט ישר במערכת הצירים

כאשר נתונה משוואת ישר ונרצה לסרטט את הישר במערכת הצירים נבצע:

- נמצא את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- x .
- נמצא את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y .
- נעביר קו ישר בין שתי הנקודות שמצאנו.

כיצד נמצא שיעור נקודה הנמצאת על ישר נתון ושיעור אחד שלה חסר ?

דוגמה: הנקודה A נמצאת על הישר שמשוואתו $y = -5x + 3$. שיעור ה- x של הנקודה A שווה 2- . מצא את שיעור ה- y של הנקודה A.

פתרון: מכיוון שהנקודה A נמצאת על הישר הנתון, שיעוריה מקיימים את משוואתו. כלומר, כל נקודה היא מהצורה $(x, -5x+3)$. לכן נציב את שיעור ה- x של הנקודה A במשוואת הישר ונמצא את שיעור ה- y של הנקודה.

$$y = (-5) \cdot (-2) + 3$$

$$y = 13$$

כלומר: $A(-2, 13)$

דוגמה: נתון הישר $y = -2x + 5$ ונתונה נקודה B על הישר ששיעור ה- y שלה שווה 3. מצא את שיעור ה- x של הנקודה.

פתרון: מכיוון שהנקודה B נמצאת על הישר הנתון, שיעוריה מקיימים את משוואתו. לכן נציב את שיעור ה- y של הנקודה B במשוואת הישר ונמצא את שיעור ה- x של הנקודה.

$$3 = (-2) \cdot x + 5 \quad / -5$$

$$-2 = -2x$$

$$x = 1$$

כלומר $B(1, 3)$

כיצד נקבע האם נקודה נמצאת על ישר נתון או לא ?

דוגמה: נתונה משוואת הישר $y = 2x - 4$. קבע האם הנקודה $(-2, 3)$ נמצאת על הישר.

פתרון: אם הנקודה נמצאת על הישר שיעוריה צריכים לקיים את משוואת הישר, כלומר הנקודה היא מהצורה $(x, 2x - 4)$.

נציב את השיעורים של הנקודה במשוואת הישר. אם מתקיים שוויון בין שני האגפים הנקודה נמצאת על הישר ואם לא – הנקודה לא נמצאת על הישר.

$$3 = 2 \cdot (-2) - 4$$

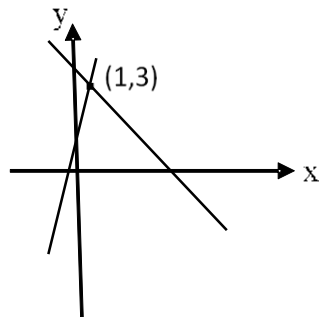
$$3 = -4 - 4$$

$$3 = -8$$

לא מתקיים שוויון בין שני אגפי המשוואה ולכן הנקודה $(-2, 3)$ לא נמצאת על הישר $y = 2x - 4$

מציאת נקודת חיתוך בין שני ישרים

דוגמה: מצא את נקודת החיתוך של הישרים $y = 2x + 1$, $y = -x + 4$



פתרון: נשווה את משוואות שני הישרים כדי לקבל את שיעור ה- x של נקודת החיתוך (נקודת החיתוך היא הנקודה ששיעור ה- y שלה צריך לקיים את שתי המשוואות של הישרים).

$$2x + 1 = -x + 4 \quad / +x$$

$$3x = 3 \quad / :3$$

$$x = 1$$

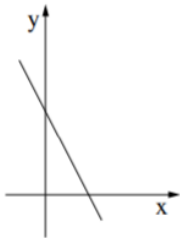
כלומר, שיעור ה- x של נקודת החיתוך בין הישרים הוא $x = 1$. כדי למצוא את שיעור ה- y של נקודת החיתוך נציב את $x = 1$ באחת ממשוואות הישרים ונקבל: $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

כלומר, נקודת החיתוך בין שני הישרים היא: $(1, 3)$

הערה: גם בהצבת x במשוואה האחרת יש לקבל $y = 3$

1. לכל אחת ממשוואות הישרים קבע מה השיפוע של הישר והאם הישר עולה, יורד, מקביל לציר ה- x או מקביל לציר ה- y

א. $y = 2x - 3$ ג. $y = 6$
 ב. $3y = -5x - 9$ ד. $x = 3$

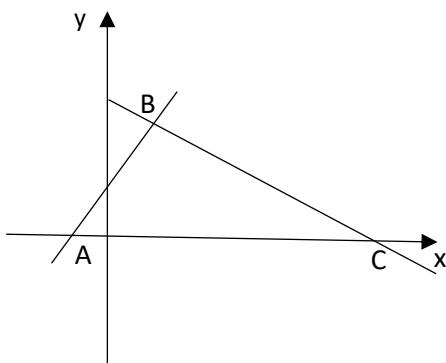


2. נתון הישר $y = -2x + 4$ יוצר משולש עם הצירים (ראה ציור).
 א. מצא את השיעורים של קודקודי המשולש.
 ב. מצא את שטח המשולש.
תשובות: א. (0,0) ב. (0,4) ג. (2,0) ד. 4 יח"ר

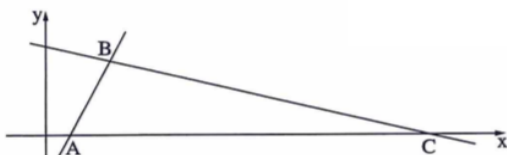
3. נתונים הישרים: $y = 2x - 4$, $y = -x - 1$
 א. סרטט את הישרים במערכת הצירים.
 ב. מצא את נקודת החיתוך בין הישרים.
תשובות: (1,-2)

4. קבע לגבי כל אחת מהנקודות הבאות האם הן נמצאות על הישר $y = 2x + 5$
 א. $A(-2,3)$ ב. $B(-3,-1)$ ג. $C(1,7)$ ד. $D(-10,-25)$
תשובות: א. לא ב. כן ג. כן ד. לא

5. הנקודות הבאות נמצאות על הישר $y = 5x - 1$. מצא את השיעור החסר של כל נקודה
 א. $A(2, _)$ ב. $B(7, _)$ ג. $C(_, -1)$ ד. $D(_, -7)$
תשובות: א. 9 ב. 34 ג. 0 ד. $-\frac{6}{5}$



6. הישר שמשוואתו $y = x + 1$, והישר שמשוואתו $y = -\frac{1}{2}x + 4$ יוצרים עם ציר ה- x את המשולש ABC.
 א. מצא את שיעורי הקדקודים A, B, ו-C.
 ב. מצא את המרחק בין שני קדקודי המשולש המונחים על ציר x.
 ג. חשב את שטח המשולש ABC.
תשובות: א. $A(-1,0)$, $B(2,3)$, $C(8,0)$ ב. 9 יח"ר
 ג. 13.5 יח"ר



7. הישר שמשוואתו $y = 2x - 3$ והישר שמשוואתו $y = -\frac{1}{4}x + 6$ יוצרים עם ציר ה- x את המשולש ABC (ראה ציור).
 א. מצא את שיעורי הקדקודים A, B, ו-C.
 ב. מצא את אורך הצלע AC.
 ג. חשב את שטח המשולש ABC.
תשובות: א. $A(1.5,0)$, $B(4,5)$, $C(24,0)$
 ב. 22.5 יחידות AC ג. 56.25 יח"ר

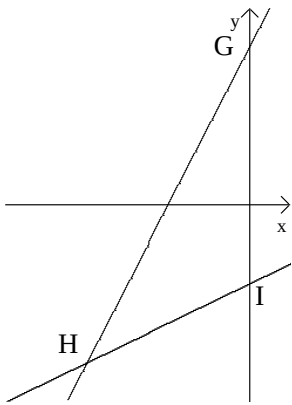
8.

הישר שמשוואתו $y = 2x + 4$, והישר שמשוואתו $y = \frac{1}{2}x - 2$,

יוצרים עם ציר ה- y את המשולש GHI.

- מצא את שיעורי הקדקודים G, H, I.
- מצא את המרחק בין שני קדקודי המשולש המונחים על ציר y . מקדקוד H מעבירים אנך לציר y .
- מצא את אורך האנך בין הקדקוד לבין ציר y .
- חשב את שטח המשולש GHI.

תשובות: G(0, 4), I(0, -2), H(-4, -4) ב. 6 יח' ג. 4 יח' ד. 12 יח''

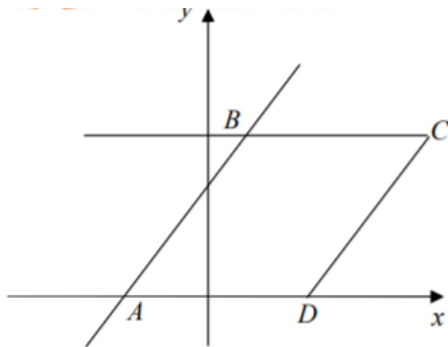


9.

נתונים הישרים $y = x$ ו- $y = -x + 6$.

- סרטט את שני הישרים במערכת הצירים.
- שני הישרים יוצרים משולש עם ציר ה- x . רשום את קדקודי המשולש.
- חשב את שטח המשולש.
- שני הישרים יוצרים משולש עם ציר ה- y . רשום את קדקודי המשולש וחשב את שטחו.

תשובות: ב. (0, 0), (6, 0), (3, 3) ג. 9 יח' ד. (0, 0), (0, 6), (3, 3), 9 יח''



10.

נתונה המקבילית ABCD (ראה ציור).

הצלע AB נמצאת על הישר שמשוואתו $y = x + 3$

A היא נקודה על ציר ה- x .

שיעור ה- x של הנקודה B הוא 1.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. שיעורי הנקודה D הם (3, 0).

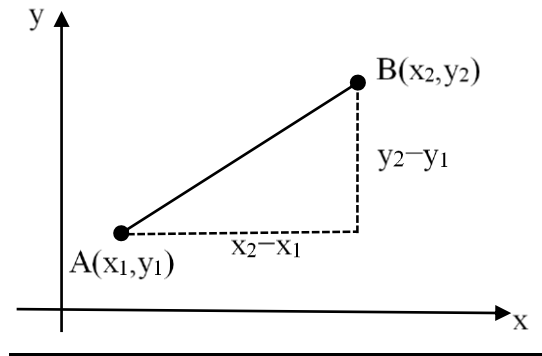
ג. מצא את שיעורי הנקודה C. נמק.

חשב את שטח המקבילית ABCD.

תשובות: א. A(-3, 0), B(1, 4) ב. C(7, 4) ג. 24 יח''

מציאת שיפוע של ישר העובר דרך שתי נקודות נתונות

נתונות הנקודות $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ במערכת הצירים :



שיפוע מוגדר כמידת העלייה בציר ה- y כאשר מתקדמים יחידה אחת ימינה בציר ה- x .

לפי הסרטוט ניתן לראות שכאשר מתקדמים $x_2 - x_1$ יחידות ימינה בציר ה- x , מתקדמים $y_2 - y_1$ יחידות על ציר ה- y .

ולכן שיפוע הישר העובר דרך הנקודות $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ הוא:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

דוגמה :

מצא את שיפוע הישר העובר דרך הנקודות $A(2,3)$ $B(4,7)$

פתרון : נשתמש בנוסחה לחישוב שיפוע של ישר העובר דרך שתי נקודות נתונות :

$$m_{AB} = \frac{7 - 3}{4 - 2} = 2$$

מציאת משוואת ישר עפ"י שתי נקודות נתונות

דוגמה : מצא את משוואת ישר העובר דרך הנקודות $(-6,3)$ $(2,-1)$

פתרון:

א. נמצא את שיפוע הישר

$$m_{AB} = \frac{3 - (-1)}{-6 - 2} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

ב. נציב את אחת הנקודות ואת שיפוע הישר במשוואה: $y - y_1 = m(x - x_1)$ ונקבל :

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 6)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}x - 3 \quad / +3$$

$$y = -\frac{1}{2}x \quad \text{כלומר:}$$

מציאת משוואת ישר עפ"י שיפוע ונקודה הנמצאת עליו

דוגמה: מצא את משוואת הישר ששיפועו 1- והעובר דרך הנקודה $(-5, -3)$

פתרון: נציב את השיפוע הנתון ואת הנקודה הנתונה בנוסחה למציאת משוואת הישר עפ"י שיפוע ונקודה:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 3 = -1(x + 5)$$

$$y + 3 = -x - 5 \quad / -3$$

$$y = -x - 8$$

תרגילים

1. מצא את שיפוע הישר העובר דרך הנקודות הבאות וקבע האם הישר עולה, יורד או מקביל לאחד הצירים.

א. $(1,5)$, $(4,7)$ ג. $(4,3)$, $(7,3)$

ב. $(4,2)$, $(2,10)$ ד. $(3,6)$, $(3,9)$

תשובות: א. $\frac{2}{3}$ (ישר עולה) ב. -4 (ישר יורד) ד. 0 (הישר מקביל לציר ה-x) ד. השיפוע לא מוגדר (הישר מקביל לציר ה-y)

2.

א. מצא את משוואת הישר ששיפוע 2 ועובר דרך הנקודה $(1,5)$

ב. מצא את משוואת הישר ששיפועו 4 ועובר דרך הנקודה $(-2,1)$

ג. מצא את משוואת הישר ששיפועו -3 ועובר דרך הנקודה $(5, -2)$

תשובות: א. $y = 2x + 3$ ב. $y = 4x + 9$ ג. $y = -3x + 13$

3. מצא את משוואות הישרים העוברים דרך הנקודות הבאות:

א. $(3,1)$, $(4,5)$ ג. $(3,6)$, $(9,3)$

ב. $(4,1)$, $(6,8)$ ד. $(-1,-6)$, $(5,-3)$

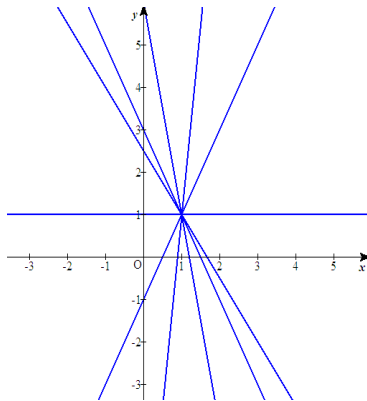
תשובות: א. $y = 4x - 11$ ב. $y = 3.5x - 13$ ג. $y = -0.5x + 7.5$ ד. $y = 0.5x - 5.5$

4. קודקודי מרובע ABCD הם: $A(2,0)$, $B(1,7)$, $C(8,6)$, $D(7,-1)$.

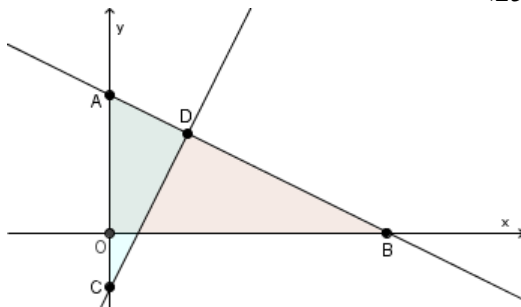
א. סרטט את המרובע במערכת הצירים.

ב. מצא את משוואות הצלעות AB ו-CD.

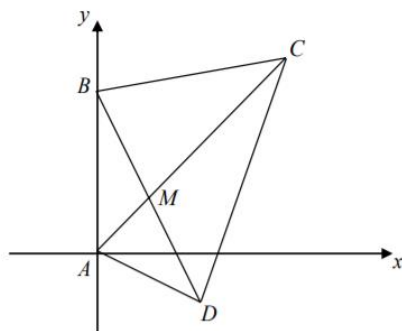
תשובות: AB: $y = -7x + 14$ CD: $y = 7x - 50$



5. כל הישרים בסרטוט עוברים דרך הנקודה $(1, 1)$.
 א. הסבר מדוע המשוואה $y = 1.5x + 0.5$ אינה מתאימה לאף אחד מהישרים שבסרטוט.
 ב. רשום משוואה של ישר כלשהו העובר דרך נקודה זו.
 ג. חשב מספר שיש לרשום במשבצת שבמשוואה $y = -2x + \square$, כדי שגם גרף של משוואה זו יעבור דרך $(1, 1)$.
- תשובות:** א. כי אינה עוברת דרך הנקודה $(1, 1)$ ב. למשל, $y = x$ ג. 3



6. שיעורי הנקודה A הם $(0, 5)$. שטח המשולש ABO הוא 2.5.
 א. מצא את שיעורי הנקודה B.
 ב. מצא את משוואת הישר העובר דרך A ו-B.
 ג. שיעורי הנקודה C הם $(0, -2)$, ושיפוע הישר CD המשורטט הוא 2. כתוב את משוואתו.
 ד. מצא את שיעורי הנקודה D.
 ה. חשב את שטח המשולש ACD.



- תרגיל מאתגר**
 נתון המרובע ABCD (ראה ציור)
 שניים מקודקודי המרובע הם: $A(0,0)$, $C(11,11)$.
 הקדקוד B מונח על ציר ה-y.
 שיעור ה-x של הקדקוד D הוא 6.
 משוואת האלכסון BD היא $y = -2x + 9$.
 א. מצא את השיעורים של הקדקוד B.
 ב. מצא את שיעור ה-y של הקדקוד D.
 ג. מצא את משוואת האלכסון AC.
 אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה M.
 ד. מצא את השיעורים של הנקודה M.
- תשובות:** א. $B(0,9)$ ב. $y_D = -3$ ג. $y = x$ ד. $M(3,3)$

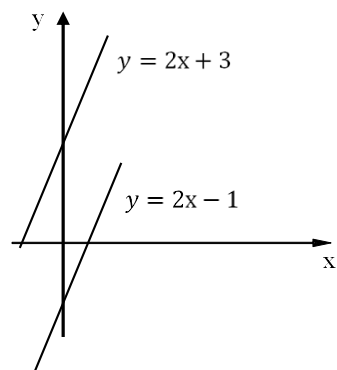
תמיד צריך לשאוף גבוה !!!



ישרים מקבילים

הישרים $y = m_1x + b_1$, $y = m_2x + b_2$ מקבילים זה לזה

אם ורק אם : $m_1 = m_2$



תרגילים

1. לגבי כל אחד מזוגות הישרים קבע האם הישרים מקבילים או לא.

א. $y = 2x + 1$, $2y = 2x + 3$

ב. $y - 1 = 3x + 3$, $y = 3x - 5$

תשובות: א. לא מקבילים ב. מקבילים

2. קדקודי מרובע ABCD הם : $A(0,0)$, $B(1,3)$, $C(5,4)$, $D(4,1)$. הראה שהמרובע הוא מקבילית.

תשובות: $m_{AB} = m_{CD} = 3$, $m_{AD} = m_{BC} = \frac{1}{4}$

3. קדקודי מרובע ABCD הם : $A(8,6)$, $B(12,4)$, $C(11,1)$, $D(5,4)$.
א. הוכח כי $CD \parallel AB$.

ב. האם המרובע ABCD הוא מקבילית ? נמק. אם לא איזה מרובע הוא ABCD ?

תשובות: $m_{AB} = m_{CD} = -\frac{1}{2}$ (ב) לא, כי AC אינו מקביל ל-BD . ABCD הוא טרפז.

4. א. מצא את משוואת הישר המקביל לישר $y = 4x - 1$ ועובר דרך הנקודה (6,3)
ב. מצא את משוואת הישר המקביל לישר $y = -2x + 3$ ועובר דרך הנקודה (5,7) .

תשובות: א. $y = 4x - 21$ ב. $y = -2x + 17$

5.

לפניך סרטוט של שני ישרים, I ו-II.

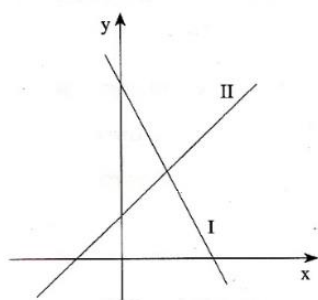
נתונות שלוש משוואות: (1) $y = x + 2$ (2) $y = -2x + 8$ (3) $y = 2x + 8$

א. לכל אחד מן הישרים I ו-II, מצא את המשוואה המתאימה מבין המשוואות (1), (2) ו-(3). נמק את תשובתך.

ב. מצא את משוואת הישר, העובר דרך ראשית הצירים $(0, 0)$ ומקביל לישר I.

ג. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הישרים I ו-II.

תשובות: א. I מתאים ל-(2), II מתאים ל-(1) ב. $y = -2x$ ג. $(2, 4)$



6.

בסרטוט ארבעה ישרים מקבילים.

א. הסבר מדוע המשוואה $y = -2x + 3$ אינה מתאימה לאף אחד מהישרים שבסרטוט.

ב. מצא את המשוואות של שניים מהישרים המשוורטטים (לבחירתך).

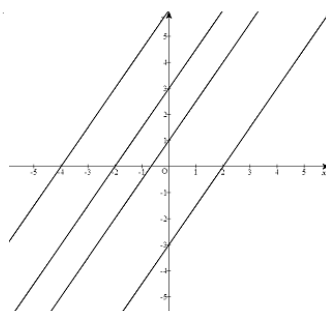
ג. מצא משוואה של ישר מקביל לארבעת הישרים,

ד. סרטט ישר העובר דרך הנקודה $(0, 9)$, ומקביל לארבעת הישרים. מה יהיה שטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים?

תשובות: א. כי שיפועה שלילי, ולכל הישרים בגרף שיפוע חיובי ב.

$y = 1.5x + 3$, $y = 1.5x + 1$, $y = 1.5x - 3$

$y = 1.5x + 6$ ג. $y = 1.5x - 1$ ד. 27 יח"ר



7.

שטח המשולש ABC הוא 3, ושיעורי הנקודה C הם $(0, -2)$.

א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את משוואת הישר שעובר דרך BC.

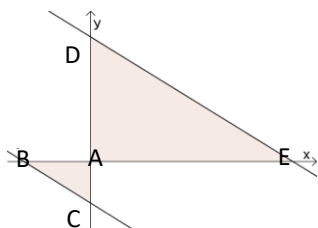
ג. $(6, 0)$ הוא אחד מקדקודי המשולש ADE, והיתר שלו

מקביל ליתר של המשולש ABC.

ד. מצא את נקודות החיתוך של היתר עם ציר ה-y.

ה. חשב את שטח המשולש ADE.

תשובות: א. $(-3, 0)$ ב. $y = -\frac{2}{3}x - 2$ ג. $(0, 4)$ ד. 12 יח"ר



8.

לפניכם סרטוט של שלושה ישרים I, II, III.

נתונות שלוש משוואות, (1), (2) ו-(3):

(1) $y = -x + 2$ (2) $y = x + 2$ (3) $y = -x - 2$

א. התאם כל אחת מן המשוואות, (1), (2), (3),

לישר אחד מבין הישרים I, II, III.

נמק את תשובתכם.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B, C, D,

המסומנות בסרטוט.

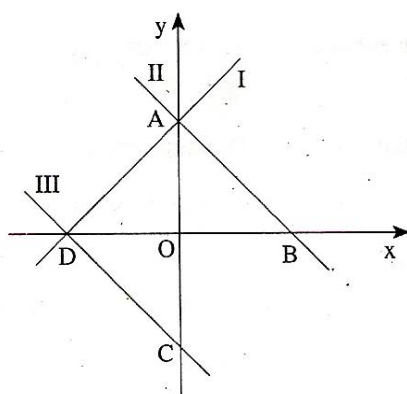
ג. מצא את משוואת הישר BC.

ד. מצא את שטח המשולש AOB.

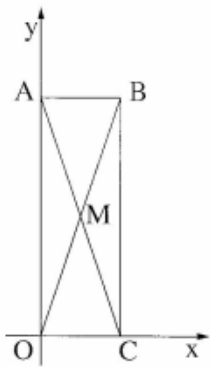
תשובות: א. I מתאים ל-(2) II מתאים ל-(1) III מתאים

ל-(3) ב. $A(0, 2)$ $B(2, 0)$ $C(0, -2)$ $D(-2, 0)$

ג. $y = x - 2$ ד. 2 יח"ר

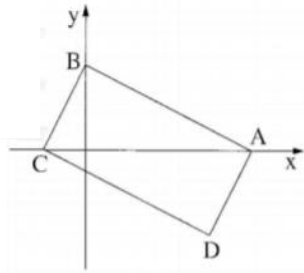


9. נתון מלבן ABCO ששתיים מצלעותיו מונחות על הצירים, כמתואר בציור.



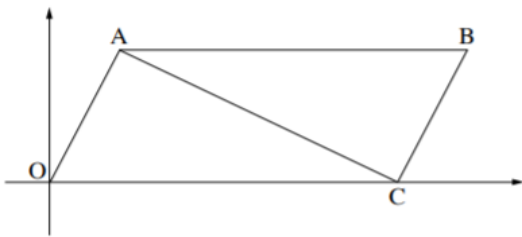
- האלכסון AC מונח על ישר שמשוואתו $y = -3x + 9$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הישר AC עם הצירים.
 ב. מצא את משוואת הישר שעליו מונחת הצלע AB.
 ג. מצא את השיעורים של הקדקוד B.
 ד. מצא את משוואת האלכסון OB.
 אלכסוני המלבן נפגשים בנקודה M.
 ה. מצא את שטח המשולש AMB.
- תשובות:** א. $A(0,9)$, $C(3,0)$ ב. $y = 9$ ג. $B(3,9)$ ד. $y = 3x$ ה. 6.75 יח"ר

10. נתון מלבן ABCD. הקדקודים A, B ו-C נמצאים על הצירים, כמתואר בציור.



- בציור נתון: $D(3,-2)$.
 משוואת הישר העובר דרך A ו-B היא $y = -0.5x + 2$.
 א. מצא את השיעורים של הקדקוד A ושל הקדקוד B.
 ב. מצא את שיפוע הישר CD.
 ג. מצא את משוואת הישר CD.
 ד. מצא את שיעורי הקדקוד C, הנמצא על ציר ה-x.
 ה. חשב את אורך האלכסון AC.
- תשובות:** א. $A(4,0)$, $B(0,2)$ ב. $m = -\frac{1}{2}$ ג. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ד. $C(-1,0)$ ה. 5 יחידות

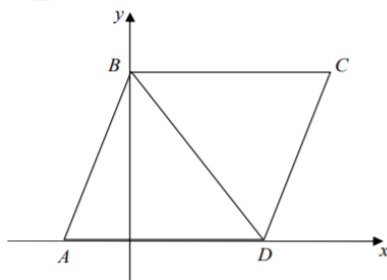
11. בציור שלפניך משורטטת מקבילית OABC (ראשית הצירים). הנקודה C נמצאת על ציר ה-x.



- נתון: משוואת הישר AC היא $y = -\frac{1}{2}x + 5$.
 א. מצא את שיעורי הנקודה C.
 נתון כי משוואת הישר OA היא $y = 2x$.
 ב. מצא את שיעורי הנקודה A.
 ג. מצא את משוואת הישר BC.
 ד. חשב את שטח המקבילית.
- תשובות:** א. $C(10,0)$ ב. $A(2,4)$ ג. $y = 2x - 20$ ד. 40

12. בציור שלפניך נתונה המקבילית ABCD.

שיעורי הקדקודים A ו-B של המקבילית הם: $A(-2,0)$, $B(0,8)$, הקדקוד D נמצא על ציר ה-x.

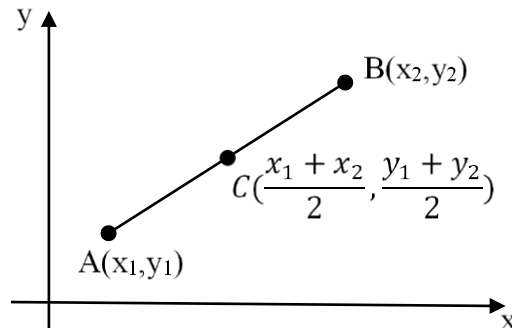


- נתון כי אורך הצלע AD הוא 12.
 א. מצא את שיעור ה-x של הנקודה D.
 ב. מצא את שיפוע הישר AB.
 ג. מצא את שיפוע הישר CD. נמק.
 ד. מצא את משוואת הישר CD.
- תשובות:** א. $x_D = 10$ ב. 4 ג. 4 ד. $y = 4x - 40$

אמצע קטע

נתונות הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ במערכת הצירים:

השיעורים של נקודת אמצע קטע שקצותיו הם: $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$



מציאת נקודת אמצע של קטע כאשר נתונות נקודות הקצה

דוגמה: נתונות הנקודות $A(-4, 3)$, $B(2, -7)$.

הנקודה C היא נקודת האמצע של הקטע AB. מצא את שיעורי הנקודה C.

פתרון:

השיעורים של נקודת האמצע C מקיימים:

$$x_C = \frac{2 + (-4)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y_C = \frac{(-7) + 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

ולכן $C(-1, -2)$

תרגיל הפוך: מציאת נקודת קצה של קטע כאשר נתונות נקודת האמצע ונקודת קצה

דוגמה: נתונות הנקודות $A(5, 4)$, $C(3, 6)$. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע ש C היא נקודת האמצע של הקטע AB.

פתרון:

השיעורים של נקודת האמצע C מקיימים:

$$3 = \frac{5 + x_B}{2} \rightarrow 6 = 5 + x_B \rightarrow x_B = 1$$

$$6 = \frac{4 + y_B}{2} \rightarrow 12 = 4 + y_B \rightarrow y_B = 8$$

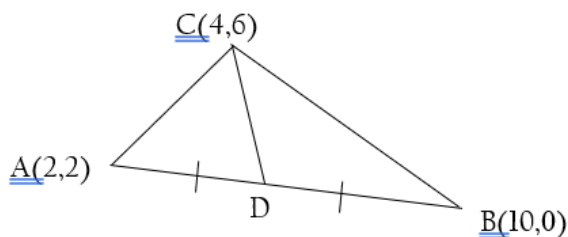
ולכן $B(1, 8)$

מציאת משוואת תיכון במשולש

הגדרה: תיכון במשולש הוא קטע המחבר את אחד הקדקודים במשולש עם אמצע הצלע שמול הקדקוד

דוגמה: נתון משולש שקדקודיו הם $A(2,2)$, $B(10,0)$, $C(4,6)$

מצא את משוואת התיכון לצלע AB.



פתרון:

א. נמצא את אמצע הצלע AB (נסמן אותה ב-D)

$$x_D = \frac{2 + 10}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$y_D = \frac{2 + 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

כלומר, אמצע הצלע AB היא הנקודה $D(6,1)$

ב. נמצא משוואת התיכון העובר דרך הנקודות D ו-C

שיפוע התיכון CD הוא:

$$m_{CD} = \frac{6 - 1}{4 - 6} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

ג. נציב את הנקודה $C(4,6)$ ואת השיפוע $m = -\frac{5}{2}$ ונקבל את משוואת התיכון CD:

$$y - 6 = -\frac{5}{2}(x - 4)$$

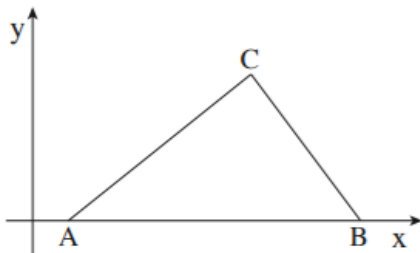
$$y - 6 = -\frac{5}{2}x + 10 \quad / +4$$

$$CD: y = -\frac{5}{2}x + 16$$

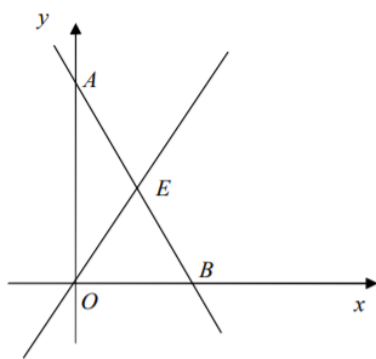
1. מצא את שיעורי נקודת האמצע של הקטע המחבר בין הנקודות הבאות:
- א. $(10,4)$ $(3,6)$ ג. $(-1,-1)$ $(-6,-7)$
 ב. $(-1,4)$ $(2,-6)$ ד. $(1,-5)$ $(-7,3)$
תשובות: א. $(6.5,5)$ ב. $(0.5,-1)$ ג. $(-3.5,-4)$ ד. $(-3,-1)$

2. א. מצא את שיעורי נקודת הקצה של קטע אשר קצהו האחד הוא $(4,0)$ ואמצעו $(2,1)$
 ב. מצא את שיעורי נקודת הקצה של קטע אשר קצהו האחד הוא $(-1,3)$ ואמצעו $(5,4)$
 ג. מצא את שיעורי נקודת הקצה של קטע אשר קצהו האחד הוא $(6,-1)$ ואמצעו $(8.5,-0.5)$
תשובות: א. $(0,2)$ ב. $(11,5)$ ג. $(11,0)$

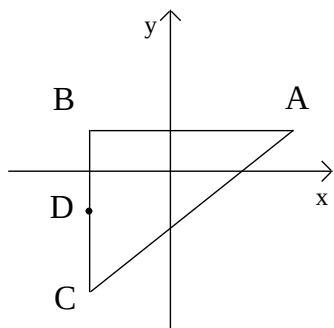
3. הצלע AB של משולש ABC מונחת על ציר ה-x ואורכה 8 יחידות.



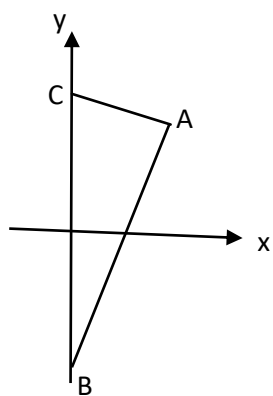
- הקדקוד השלישי נמצא בנקודה $C(6,4)$
 א. מצא את שטח המשולש ABC.
 הנקודה D היא אמצע הצלע AB.
 ב. מצא את שטח המשולש ACD.
 הנקודה E היא אמצע הצלע AC.
 ג. מצא את שטח המשולש ABE.
 ד. מצא את שטח המשולש BCE.
תשובות: א. 16 יח"ר ב. 8 יח"ר ג. 8 יח"ר ד. 8 יח"ר



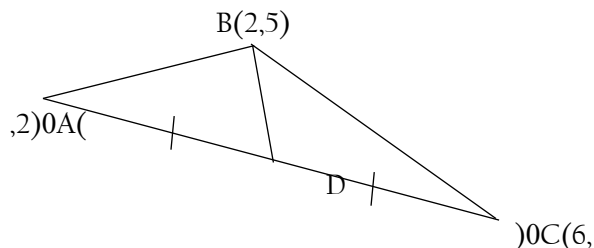
4. בשרטוט שלפניך מתוארים שני הישרים AB ו-OE (O ראשית הצירים)
 נתונה המשוואה של אחד הישרים $y = 16 - 4x$
 א. איזה ישר מבין שני הישרים מתאים למשוואה הנתונה? נמק.
 ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
 הנקודה E היא אמצע הקטע AB.
 ג. מצא את שיעורי הנקודה E.
 ד. הראה כי שטח המשולש OEA שווה לשטח המשולש OEB.
תשובות: א. AB ב. $A(0,16)$, $B(4,0)$ ג. $E(2,8)$ ד. הוכחה (16 יח"ר)



5. הנקודות $A(3,1)$, $B(-2,1)$, $C(-2,-3)$ הן שלושה קדקודים של משולש.
 ג. חשב את שטח המשולש ABC.
 ד. הנקודה D היא אמצע הצלע BC. מצא את שיעורי הנקודה D.
 ה. חשב את שטח המשולש ABD.
 ו. חשב את שטח המשולש ACD.
תשובות: א. 10 יח"ר ב. $D(-2,-1)$ ג. 5 יח"ר ד. 5 יח"ר

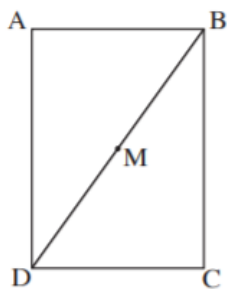


9. בציר שלפניך הצלע AB של המשולש ABC מונחת על הישר $y = 4x - 14$.
 B היא נקודת החיתוך של הישר AB עם ציר ה- y .
 שיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.
 א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
 הקדקוד C נמצא על ציר ה- y כך שאורך הצלע BC הוא 17.
 ב. מצא את שיעורי הנקודה C.
 ג. חשב את שטח המשולש ABC.
 ד. מצא את משוואת התיכון לצלע AB (התיכון יוצא מנקודה C)
תשובות: א. $B(0, -14)$, $A(4, 2)$ ב. $C(0, 3)$ ג. 34 יח"ר
 ד. $y = -4.5x + 3$

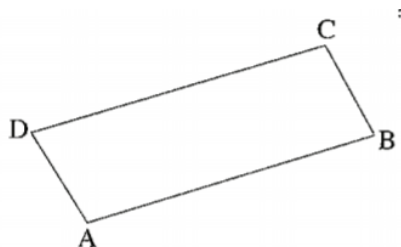


10. קדקודי משולש ABC הם: $A(0, 2)$, $B(2, 5)$, $C(6, 0)$.
 א. מצא את אמצע הקטע AC (נקודה D).
 ב. מצא את משוואת התיכון לצלע AC (הקטע BD)
תשובות: א. $D(3, 1)$ ב. $y = -4x + 13$

11. הצלעות של מלבן ABCD מקבילות לצירים. M היא נקודת המפגש של אלכסוני המלבן, AC ו-BD.
 נתון: $B(9, 12)$, $M(6, 8)$.
 א. מצא את שיעורי קדקוד D.
 ב. מצא את שיעורי הקדקודים A ו-C.
 ג. מצא את שטח המלבן.
תשובות: א. $D(3, 4)$ ב. $(3, 12)$, $(9, 4)$ ג. 48 יח"ר

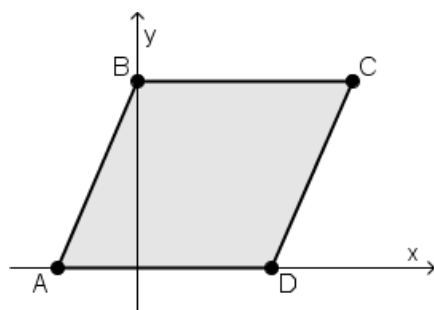


12. הצלעות של מלבן ABCD מקבילות לצירים.
 צלע AB מקבילה לציר ה- x .
 וצלע AD מקבילה לציר ה- y .
 M היא נקודת המפגש של אלכסוני המלבן.
 נתון: $B(8, 11)$, $M(6, 8)$.
 א. מצא את שיעורי הקדקוד D.
 ב. רשום את שיעורי הקדקוד A.
 ג. חשב את שטח המלבן ABCD.
תשובות: א. $D(4, 5)$ ב. $A(4, 11)$ ג. 24 יח"ר

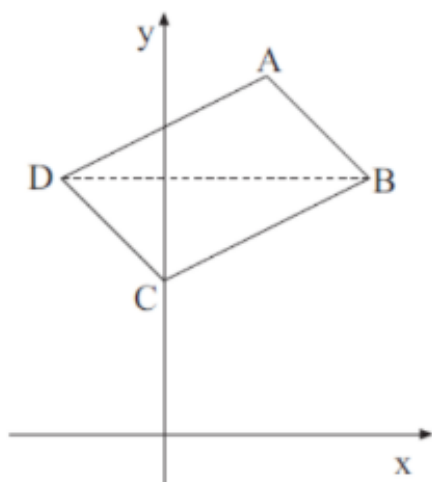


13. במקבילית ABCD (ראה ציור) נתונים הקדקודים:
 $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $D(0, 3)$.
 א. מצא את נקודת החיתוך של אלכסוני המקבילית.
 ב. חשב את שיעורי הקדקוד C.
תשובות: א. $M(5.5, 3)$ ב. $C(10, 5)$

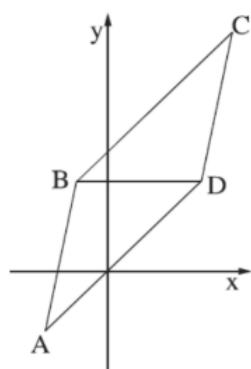
14. שיעורי הקדקודים A ו-B של המקבילית ABCD הם $(-3, 0)$ ו- $(0, 7)$. שטח המקבילית 56.



- א. מצא את אורך AD.
 ב. מצא את שיעורי הנקודה D.
 ג. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע AB?
 ד. מצא את שיעורי הנקודה C.
 ה. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע CD?
 ו. מצא את נקודת החיתוך של האלכסונים AC ו-BD.
תשובות: א. 8 ב. D(5, 0) ג. $y = \frac{7}{3}x + 7$ ד. C(8, 7) ה. $y = \frac{7}{3}x - \frac{35}{3}$ ו. (2.5, 3.5)



15. במקבילית ABCD. נתון:
 הצלע AD מונחת על הישר $y = \frac{1}{2}x + 6$,
 הצלע CD מונחת על הישר $y = -x + 3$,
 הקדקוד C נמצא על ציר ה-y.
 א. מצא את שיעורי הקדקוד C.
 ב. מצא את משוואת הישר שהצלע BC מונחת עליו.
 ג. מצא את האלכסון BD מקביל לציר ה-x.
 ד. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.
 ה. מצא את נקודת החיתוך של אלכסוני המקבילית.
 ו. מצא את שיעורי הנקודה M.
תשובות: א. C(0,3) ב. $y = \frac{1}{2}x + 3$ ג. B(4,5) ד. D(-2,5) M(1,5)

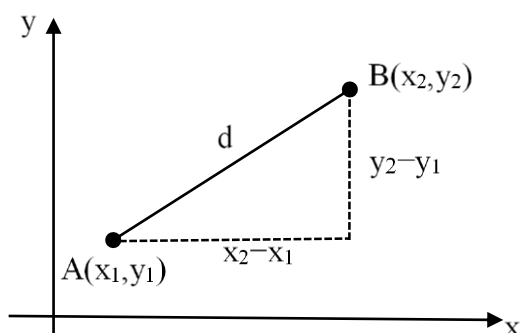


16. בציר שלפניך מקבילית ABCD.
 נתונים הקדקודים A(-2,-2) B(-1,3)
 האלכסון BD מקביל ל ציר ה-x
 הצלע AD מונחת על הישר $y = x$
 א. מצא את שיעורי הקדקוד D.
 ב. מצא את משוואת הישר שעליו מונחת הצלע DC.
 ג. מצא את שיעורי הקדקוד C.
תשובות: א. D(3,3) ב. $y = 5x - 12$ ג. C(4,8)

מרחק בין שתי נקודות

נתונות הנקודות A(x₁, y₁) ו-B(x₂, y₂) במערכת הצירים:

נגדיר את d כמרחק בין הנקודות A ו-B (d מהמילה distance)



לפי משפט פיתגורס ניתן לראות כי: $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

ולכן המרחק d בין הנקודות A ו-B הוא:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

תרגילים – מרחק בין שתי נקודות

1. קדקודי מרובע ABCD הם: A(2,0), B(1,7), C(8,6), D(7,-1).

א. מצא את משוואות הצלעות AB ו-CD.

ב. חשב את אורכי האלכסונים של המרובע.

תשובות: א. AB: $y = -7x + 14$ CD: $y = 7x - 50$ ב. $AC = \sqrt{72}$ BD = 10

2. נתונות משוואות של שני ישרים: $y = 2x + 2$, $y = 3x - 3$.

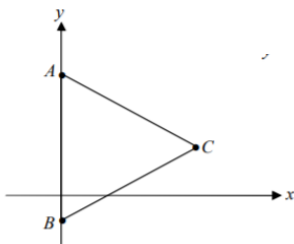
הישרים חותכים זה את זה בנקודה M.

א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. האם הישר שמשוואתו $y = -3x + 15$ עובר דרך הנקודה M? נמק.

ג. חשב את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.

תשובות: א. M(5,12) ב. לא ג. 13 יחידות



3. הישר שמשוואתו $y = \frac{1}{2}x - 2$ והישר שמשוואתו $y = -\frac{3}{4}x + 8$ יוצרים

עם ציר ה-y את המשולש ABC, כמתואר בציור.

א. מצא את שיעורי הקדקודים A, B, C.

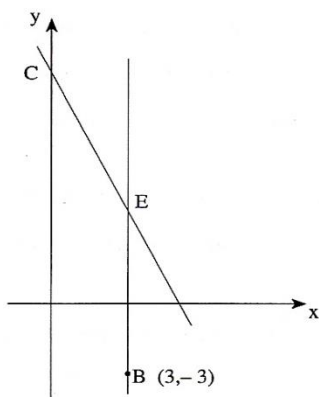
ב. מצא את אורך הצלע AB.

ג. חשב שטח המשולש ABC.

ד. הראה כי: $AB = AC$.

תשובות: א. A(0,8), B(0,-2), C(8,2) ב. 10 יחידות ג. 40 יחידות

ד. הוכחה



4. הישר BE מקביל לציר ה-y. שיעורי נקודה B הם (3,-3).

דרך נקודה E עובר ישר CE, שמשוואתו: $y = -2x + 10$.

והוא חותך את ציר ה-y בנקודה C (ראו סרטוט).

א. חשב את שיעורי הנקודה E.

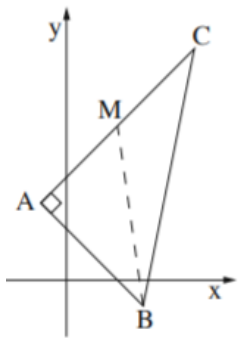
ב. חשב את אורך הקטע BE.

ג. חשב את אורך הקטע CE.

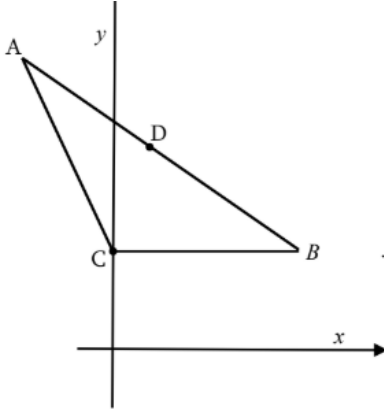
ד. מצא את משוואת הישר MC.

ה. חשב את שטח המשולש OCE (O – ראשית הצירים).

תשובות: א. E(3,4) ב. 7 ג. $\sqrt{45}$ ד. $y = -\frac{19}{6}x + 10$ ה. 15

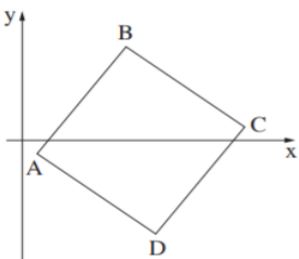


5. הנקודות $(-1, 3)$, $(3, -1)$ ו- $(5, 9)$ הן קדקודים של משולש ישר הזווית ABC שבציר $(\angle A = 90^\circ)$.
- קבע על פי הציור את שיעורי הקדקודים A, B, C ומצא את השיעורים של נקודת אמצע הקטע AC (הנקודה M שבציר).
 - מצא את משוואת התיכון לצלע AC.
 - האם הישר שאת משוואתו מצאת בסעיף ב עובר דרך הנקודה $(1, 13)$? נמק.
 - מצא את שטח המשולש ABM.
- תשובות:** א. $A(-1, 3)$, $B(3, -1)$, $C(5, 9)$, $M(2, 6)$ ב. $y = -7x + 20$ ג. הישר עובר דרך הנקודה 12 יח"ר

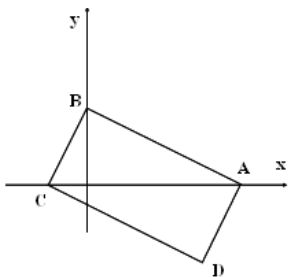


6. נתונה הנקודה $D(2, 11)$, הנקודה B נמצאת על הישר $y = 7$. הישר $y = 7$ חותך את ציר ה- y בנקודה C. מרחק הנקודה B מהנקודה C שווה למרחק הנקודה B מהנקודה D.
- מהם שיעורי הנקודה C.
 - חשב את שיעורי הנקודה B.
- הנקודה A נמצאת על המשך הקטע BD כך ש-D היא אמצע הקטע AB.
- חשב את שיעורי הנקודה A.
 - חשב את שטח המשולש ABC.
- תשובות:** א. $C(0, 7)$ ב. $B(5, 7)$ ג. $A(-1, 15)$ ד. 20 יח"ר

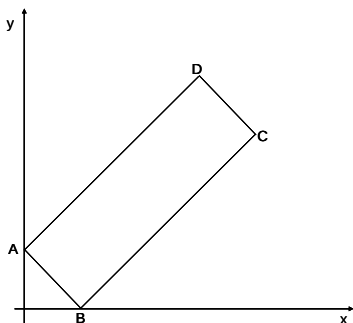
7. הנקודות ששיעוריהן הם: $A(1, 2)$, $B(4, 1)$, $C(5, 4)$, הן שלושה קדקודים של ריבוע ABCD.
- סרטט את הצלעות AB ו-BC, ומצא את שיפוע הישר עליו מונחת הצלע AB.
 - מצא את שיפוע הישר עליו מונחת הצלע BC.
 - סרטט את הצלעות AD ו-CD, ומצא את שיעורי הקדקוד D.
 - מצא את שיעורי נקודת החיתוך של האלכסונים.
 - הראה כי שטח הריבוע הוא 10.
- פתרונות:** א. $-\frac{1}{3}$ ב. 3 ג. $D(2, 5)$ ד. $(3, 3)$ ה. הוכחה



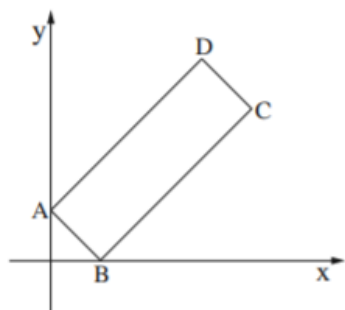
8. הנקודות $A(1, -1)$ ו- $B(7, 7)$ הן שני קדקודים סמוכים של ריבוע ABCD (ראה ציור).
- חשב את אורך הצלע AB.
 - חשב את שטח הריבוע.
 - חשב את האורך של אלכסון הריבוע.
 - הראה שמכפלת אורכי האלכסונים של הריבוע גדולה פי 2 משטח הריבוע.
- תשובות:** א. 10 יח" ב. 100 יח"ר ג. 14.1 יח" או $10\sqrt{2}$ ד. הוכחה



9. ABCD הוא מלבן. נתון כי: $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ ו- $D(3, -2)$.
- מהי משוואת הישר העובר דרך A ו-B?
 - מצא את משוואת הישר CD.
 - מצא את שיעורי הקדקוד C, הנמצא על ציר ה- x .
 - חשב את אורך האלכסון BD.
 - מצא את נקודת החיתוך של אלכסוני המלבן.
- תשובות:** א. $y = -0.5x + 2$ ב. $y = -0.5x - 0.5$ ג. $(-1, 0)$ ד. 5 ה. $(1.5, 0)$

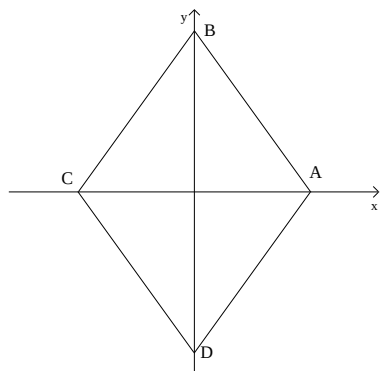


10. הנקודות $B(1, 0)$ ו- $C(4, 3)$ הן קדקודים סמוכים במלבן ABCD.
- מהו שיפוע הישר העובר דרך B ו-C?
 - שיפוע הישר עליו נמצא AB הוא -1. מצאו את שיעורי A.
 - מצא את משוואת הישר העובר דרך A ו-D.
 - מצא את משוואת הישר העובר דרך C ו-D.
 - חשב את שטח המלבן ABCD.
- תשובות:** א. 1 ב. $(0, 1)$ ג. $y = x + 1$ ד. $y = -x + 7$ ה. 6

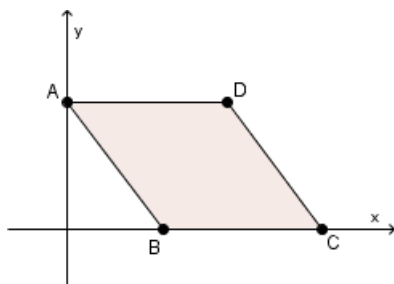


11. משוואת הישר שעליו מונחת הצלע AB היא $y = -x + 1$.
 א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
 ב. נתון כי שיפוע הישר שעליו מונחת הצלע BC הוא 1. מצא את משוואת הישר BC.
 ג. נתון כי שיעור ה-x של הנקודה C הוא 4. מצא את שיעור ה-y של הנקודה C.
 ד. מצא את שטח המלבן ABCD.
תשובות: א. $A(0,1)$, $B(1,0)$ ב. $y = x - 1$ ג. $y_C = 3$ ד. 6 יח"ר

12. קדקודי מרובע ABCD הם: $A(3,2)$, $B(2,9)$, $C(7,14)$, $D(8,7)$. הוכח כי המרובע הוא מעוין.
תשובות: כל הצלעות אורכן $\sqrt{50}$



13. נתון מרובע שקדקודיו הם: $A(5,0)$, $B(0,7)$, $C(-5,0)$, $D(0,-7)$.
 א. הראה שהמרובע הוא מעוין.
 הנקודה M נמצאת בחיתוך האלכסונים של המעוין.
 ב. מצא את שיעורי הנקודה M.
 ג. חשב את שטח המשולש AMB.
 ד. חשב את שטח המעוין.
 ה. הראה שמכפלת אורכי האלכסונים של המעוין גדולה פי 2 משטח המעוין.
תשובות: א. הוכחה ב. $(0,0)$ ג. 17.5 יח"ר ד. 70 יח"ר



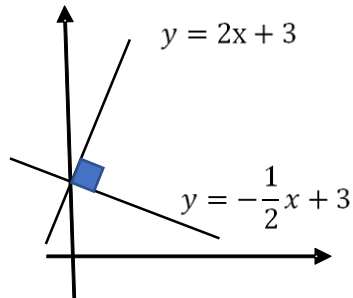
14. נתון המעוין ABCD (ראו סרטוט). שיעורי הנקודה A הם $(0,4)$ ושיעורי הנקודה B הם $(3,0)$.
 א. חשב את אורך AB.
 ב. חשב את היקף המעוין.
 ג. מצא את שיעורי נקודה C.
 ד. חשב את שטח המעוין.
 ה. מצא את שיעורי נקודה D.
 ו. חשב את אורך האלכסון BD.
 ז. מצא את משוואת הישר העובר דרך A ו-C.
 ח. מהי נקודת החיתוך של האלכסונים?
תשובות: א. 5 ב. 20 ג. $(8,0)$ ד. 20 ה. $(5,4)$ ו. 4.47 ז. $y = -0.5x + 4$ ח. $(4,2)$

הישרים $y = m_1x + b_1$, $y = m_2x + b_2$ מאונכים זה לזה

אם ורק אם מכפלת שיפועיהם שווה -1

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{כלומר:}$$

כלומר, השיפועים של שני הישרים הם הופכיים ונגדיים זה לזה



מציאת משוואת ישר המקביל לישר נתון ועובר דרך נקודה נתונה

דוגמה: נתונה משוואת הישר $y = -\frac{1}{2}x + 3$. מצא את משוואת הישר המאונך לישר הנתון ועובר דרך הנקודה $(-3, 6)$.

פתרון:

א. מכיוון שהישר אותו אנו מחפשים מאונך לישר הנתון, שיפועו יהיה הופכי ונגדי לישר הנתון. שיפוע הישר הנתון הוא $m = -\frac{1}{2}$ ולכן שיפוע הישר המבוקש הוא $m = 2$.

ב. נציב את השיפוע $m = 2$ ואת הנקודה $(-3, 6)$. בנוסחה למציאת משוואת הישר עפ"י שיפוע ונקודה:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 6 = 2(x + 3)$$

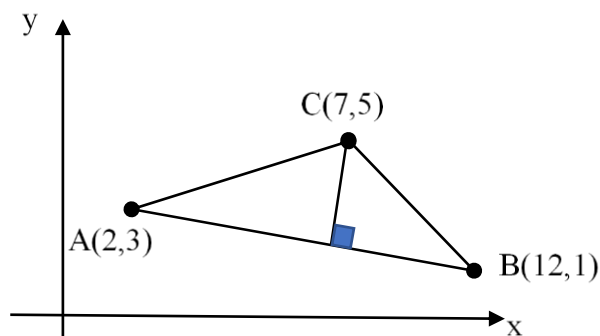
$$y - 6 = 2x + 6 \quad +6$$

$$y = 2x + 12$$

מציאת משוואת הגובה במשולש

הגדרה: גובה במשולש הוא ישר היוצא מקדקוד המשולש לצלע ממולו

דוגמה: נתון משולש שקדקודיו הם $A(2,3)$, $B(12,1)$, $C(7,5)$.
מצא את משוואת הגובה לצלע AB .



פתרון:

א. נמצא את שיפוע AB

$$m_{AB} = \frac{1-3}{12-2} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

מכיוון שהגובה ל- AB מאונך לצלע AB מכפלת שיפועיהם שווה -1 .

כלומר, שיפועיהם הופכיים ונגדיים זה לזה. ולכן:

$$m_{\text{גובה}} = 5$$

ב. נמצא את משוואת הישר העובר דרך $C(7,5)$ ושיפועו 5
 $y - 5 = 5(x - 7)$

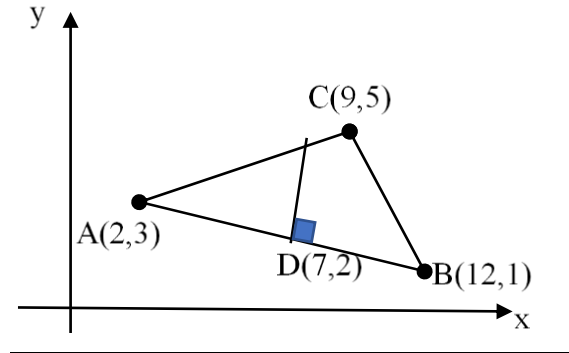
$$y - 5 = 5x - 35 \quad /+5$$

$$y = 5x - 30$$

מציאת משוואת אנך אמצעי במשולש

הגדרה: אנך אמצעי הוא ישר המאונך לקטע נתון וחוצה אותו

דוגמה: נתון משולש שקדקודיו הם $A(2,3)$, $B(12,1)$, $C(9,5)$.
מצא את משוואת האנך האמצעי לצלע AB .



פתרון:

א. נמצא את אמצע הצלע AB (נסמן אותה ב- D)

$$x_D = \frac{2 + 12}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$y_D = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

כלומר, אמצע הצלע AB היא הנקודה $D(7,2)$

ב. נמצא את שיפוע הצלע AB

$$m = \frac{3 - 1}{2 - 12} = \frac{2}{-10} = -\frac{1}{5}$$

מכיוון שהאנך האמצעי לקטע AB מאונך לקטע AB , שיפוע האנך האמצעי יהיה 5.

ג. נמצא את משוואת הישר העובר בנקודה $D(7,2)$ ושיפועו 5
ולכן משוואתו תהיה:

$$y - 2 = 5(x - 7)$$

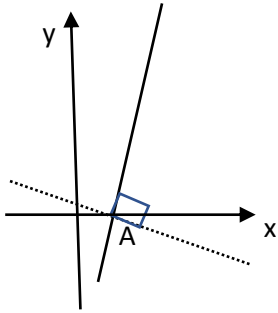
$$y - 2 = 5x - 35 \quad /+2$$

$$y = 5x - 33$$

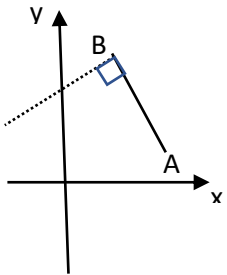
תרגילים – ישרים מאונכים

1. השלים:
- | שיפוע של ישר | שיפוע של ישר | שיפוע של הישר המאונך | שיפוע של הישר |
|------------------|-------------------|----------------------|----------------------|
| א. 2 | $-\frac{3}{2}$ ד. | _____ | שיפוע של הישר המאונך |
| ב. 1 | ה. -1 | _____ | שיפוע של הישר |
| ג. $\frac{1}{4}$ | ו. -5 | _____ | שיפוע של הישר המאונך |
- תשובות:** א. $-\frac{1}{2}$ ב. -1 ג. -4 ד. $\frac{2}{3}$ ה. 1 ו. $\frac{1}{5}$

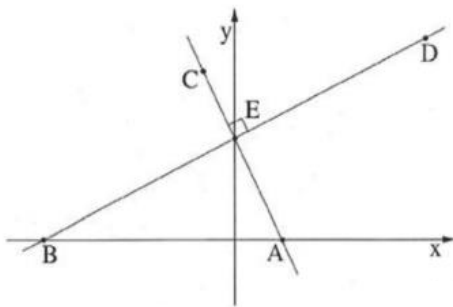
2. נתון הישר $y = 2x - 4$. מצא את משוואת הישר המאונך לישר הנתון ועובר דרך נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- x (הנקודה A). **תשובות:** $y = -\frac{1}{2}x + 1$

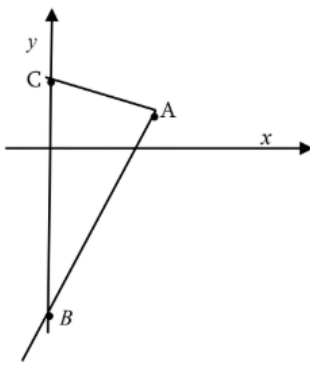


3. נתונות הנקודות A(4,1) ו-B(2,5). מצא את משוואת הישר המאונך לקטע AB בנקודה B. **תשובה:** $y = \frac{1}{2}x + 4$

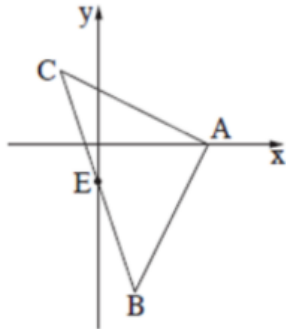


4. בסרטוט שלפניך נתונים שני ישרים מאונכים זה לזה. הישרים נפגשים בנקודה E שעל ציר ה- y . נתון כי שיעור ה- y של הנקודה E הוא 6. ושיפועו של אחד הישרים הוא $\frac{1}{2}$.
- מצא את המשוואה של כל אחד מהישרים.
 - מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
 - נקודה D נמצאת על המשך BE כך ש- $ED = BE$. מצא את שיעורי הנקודה D.
 - נקודה C נמצאת על המשך AE ושיעור ה- x שלה הוא -2. מצא את שטח המשולש ABC.
- תשובות:** א. $BD: y = \frac{1}{2}x + 6$, $AC: y = -2x + 6$ ב. $B(-12,0)$ ג. $A(3,0)$ ד. 75 יח"ר

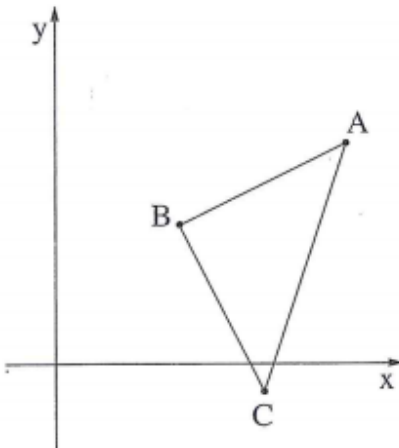




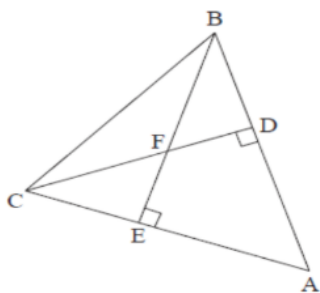
5. הצלע AB של משולש ABC מונחת על הישר $y = 4x - 15$
 B היא נקודת החיתוך של הישר AB עם ציר ה- y
 שיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.
 הקדקוד C נמצא על ציר ה- y כך שאורך הצלע BC הוא 17.
 (כמתואר בציור)
 א. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-C.
 ב. הראה שהמשולש ABC הוא משולש ישר זווית.
 ג. חשב את שטח המשולש ABC.
 ד. מצא את משוואת התיכון לצלע BC.
תשובות: א. $C(0, 2)$ B $(0, -15)$ A $(4, 1)$ ב. משולש ישר זווית $\angle A$
 ג. $90^\circ = 34$ יח"ר
 ד. $y = 1.875x - 6.5$



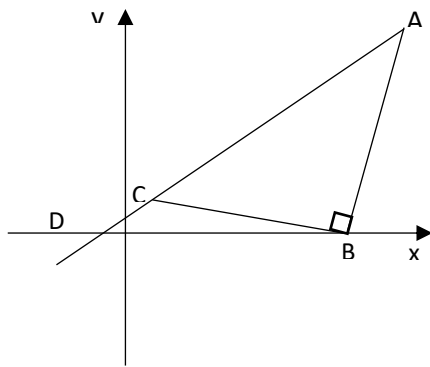
6. בציור שלפניך משולש ABC. הקדקוד A נמצא על ציר ה- x .
 שיעורי הקדקוד C הם $(-1, 2)$.
 הנקודה E $(0, -1)$ היא אמצע הצלע BC.
 א. מצא את שיעורי הנקודה B.
 ב. נתון כי שיפוע הישר AB הוא 2. מצא את שיעורי הנקודה A.
 ג. העבירו ישר דרך הנקודות A ו-E.
 ד. הוכח כי הישר AE מאונך לישר BC.
 חשב את שטח המשולש ABC.
תשובות: א. B $(1, -4)$ ב. A $(3, 0)$ ג. $m_{AE} = \frac{1}{3}$ $m_{BC} = -3$ הופכי ונגדי
 ד. 10 ולכן הישרים מאונכים



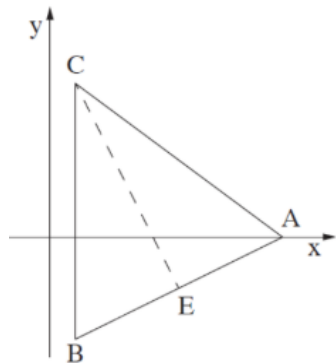
7. נתון משולש ABC.
 צלעות המשולש AB ו-BC מונחות על הישרים $y = \frac{1}{2}x + 2$ ו- $y = -2x + 17$ (ראה ציור).
 א. מצא את שיעורי הנקודה B.
 ב. שיעור ה- x של הנקודה A הוא 12. מצא את שיעור ה- y של הנקודה A.
 ג. נתון כי שיעורי הנקודה C הם $(9, -1)$.
 ד. הוכח כי משולש ABC הוא משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים.
 חשב את שטח המשולש ABC.
תשובות: א. B $(6, 5)$ ב. $y_A = 8$ ג. הוכחה $m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$
 ולכן $\angle B = 90^\circ$,
 ד. $AB = BC = \sqrt{45}$ 22.5 יח"ר



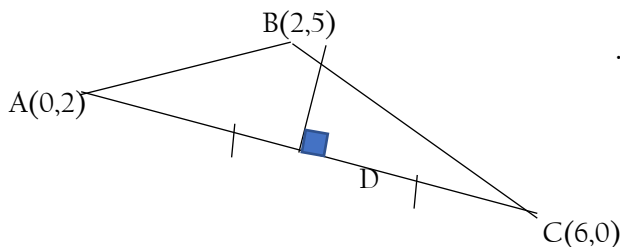
8. נתון משולש ששניים מקדקודיו הם: B $(0, 12)$ ו-A $(6, -6)$.
 CD הוא הגובה לצלע AB ו-BE הוא הגובה לצלע AC.
 F היא נקודת מפגש BE ו-CD (ראה ציור).
 א. מצא את משוואת הגובה CD.
 ב. מצא את השיפוע של הגובה BE.
 ג. מצא את שיעורים של הקדקוד C.
תשובות: $y = \frac{1}{3}x + 4$ ב. $m_{BE} = 3$ ג. AC: $-\frac{1}{3}x - 4$
 ד. C $(-12, 0)$



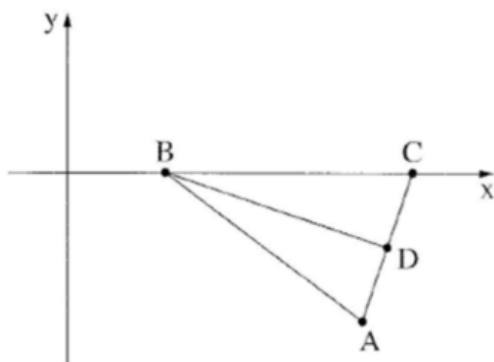
9. במשולש ישר זווית $\angle ABC = 90^\circ$ היתר AC מונח על הישר $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ והניצב BC מונח על הישר $y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$. קדקוד B מונח על ציר ה-x (ראה ציור).
 א. מצא את שיעורי הקדקוד B.
 ב. מצא את משוואת הישר שעליו מונח הניצב AB.
 ג. הישר שעליו מונח היתר AC חותך את ציר ה-x בנקודה D. מצא את אורך הקטע BD.
 ד. מצא את שטח המשולש ABD.
- תשובות:** א. $B(8,0)$ ב. $y = 7x - 56$ ג. $BD = 8\frac{1}{3}$ ד. $29\frac{1}{6}$ יח"ר



10. קדקודי משולש הם: $A(9,0)$, $B(1,-4)$, $C(1,6)$. הנקודה E היא אמצע הצלע AB.
 א. מצא את משוואת התיכון לצלע AB.
 ב. מצא את משוואת הגובה לצלע AB.
 ג. הראה שהמשולש ABC הוא שווה-שוקיים ($AC = BC$). (אפשר להסתמך על התוצאות בסעיפים הקודמים).
 ד. מצא את שטח המשולש ABC.
- תשובות:** א. $y = -2x + 8$ ב. $y = -2x + 8$ ג. $BC = AC = 10$ (אפשר גם לפי המשפט: אם התיכון והגובה במשולש מתלכדים אז המשולש הוא שווה-שוקיים) ד. 40 יח"ר

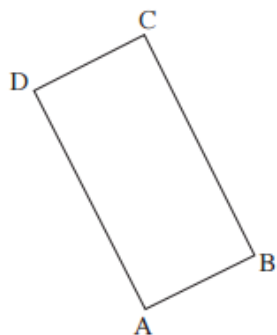


11. קדקודי משולש ABC הם: $A(0,2)$, $B(2,5)$, $C(6,0)$.
 א. מצא את אמצע הקטע AC (נקודה D).
 ב. מצא את משוואת האנך האמצעי לצלע AC.
- תשובות:** א. $D(3,1)$ ב. $y = 3x - 8$



12. במשולש ABC, הצלע BC מונחת על ציר ה-x, כמתואר בציור. נתון: $BC = 10$.
 הקדקוד A נמצא בנקודה $(12,-6)$.
 משוואת הצלע AB היא $y = -\frac{3}{4}x + 3$.
 א. מצא את שיעורי הקדקוד B.
 ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.
 ג. BD הוא תיכון למשולש ABC. מצא את משוואת התיכון BD.
 ד. הראה כי BD מאונך ל-AC.
 ה. מצא את שטח המשולש ABC.
 ו. פי כמה גדול שטח המשולש ABC משטח המשולש BCD? נמק.
- תשובות:** א. $B(4,0)$ ב. $C(14,0)$ ג. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ ד. הוכחה ה. 30 יח"ר ו. 2

13. שני קדקודים סמוכים במלבן ABCD הם: $A(0,1)$, $B(4,3)$ (ראה ציור).



משוואת האלכסון BD היא $y = -\frac{3}{4}x + 6$

- מצא את השיפוע של הצלע AB.
- מצא את משוואת הצלע AD.
- מצא את שיעור הקדקוד D.
- חשב את שטח המלבן.

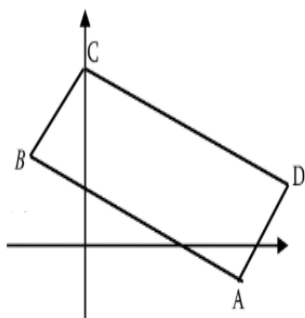
תשובות: א. $\frac{1}{2}$ ב. $y = -2x + 1$ ג. $D(-4,9)$ ד. 40 יח"ר

14. במלבן ABCD נתון: $A(6,-1)$, $B(-2,3)$

קדקוד C נמצא על ציר ה-y

- מצא את השיפוע של הצלע BC.
- מצא את שיעורי הקדקוד C.
- מצא את שיעורי הקדקוד D.
- חשב את שטחו המלבן ABCD.

תשובות: א. $m_{BC} = 2$ ב. $C(0,7)$ ג. $D(8,3)$ ד. 16 יח"ר



15. קדקוד C של המלבן ABCD מונח על ציר ה-y

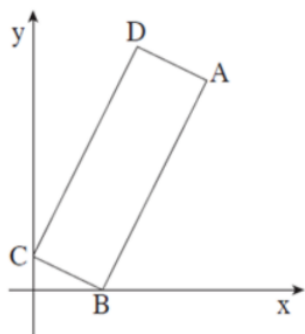
וקדקוד B של המלבן מונח על ציר ה-x (ראה ציור)

שיעור ה-x של קדקוד A הוא 10.

משוואת הצלע AB היא $y = 2x - 8$

- מצא את השיפוע של הצלע BC.
- מצא את שיעורי הקדקודים A, B, C.
- מצא את השיעורים של הקדקוד D.

תשובות: א. $m_{BC} = -\frac{1}{2}$ ב. $A(10,12)$ $C(0,2)$ $B(4,0)$ ג. $D(6,14)$



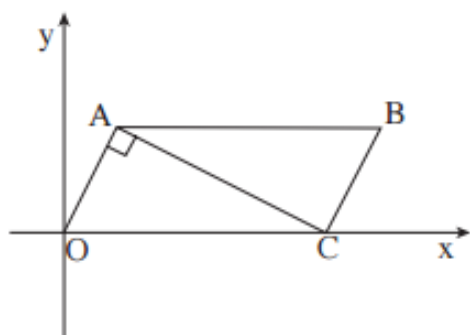
16. נתונה מקבילית OABC.

קדקוד O בראשית הצירים וקדקוד C על ציר ה-x (ראה ציור).

נתון: $\angle OAC = 90^\circ$ ושיעורי קדקוד A הם (2,4).

- מצא את משוואת הצלע OA.
- מצא את משוואת האלכסון AC.
- מצא את השיעורים של הקדקוד C.
- מצא את השיעורים של הקדקוד B.

תשובות: א. $OA: y = 2x$ ב. $AC: y = -\frac{1}{2}x + 5$ ג. $C(10,0)$ ד. (12,4)

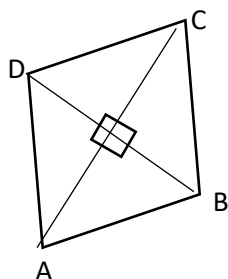


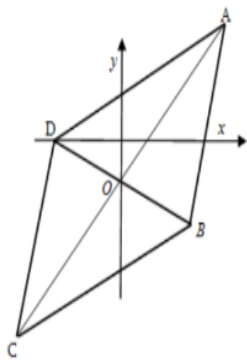
17. שני קדקודים סמוכים במעוין ABCD הם $A(4,1)$ ו- $B(8,3)$

משוואת האלכסון AC היא $y = x - 3$

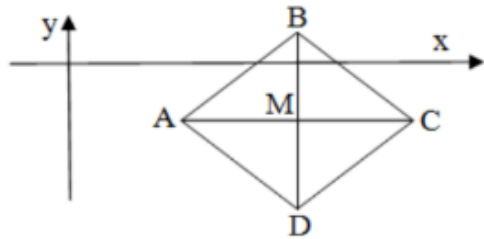
- מצא את משוואת האלכסון BD.
- מצא את שיעורי קדקוד C.

תשובות: א. $y = -x + 11$ ב. $C(10,7)$

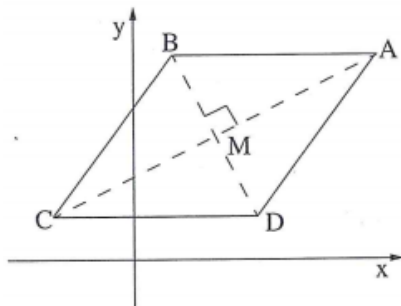




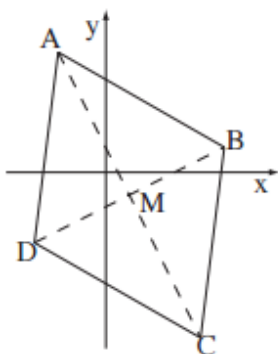
18. במעוין ABCD נתון : השיעורים של קדקוד B הם $B(4, -4)$,
 משוואת האלכסון AC היא $y = 2x - 2$
 א. מצא את משוואת האלכסון BD.
 ב. מצא את השיעורים של נקודת המפגש של האלכסונים במעוין.
 נתון כי שיעור ה- y של קדקוד A הוא 4
 ג. מצא את השיעורים של הקדקודים A ו-C.
תשובות: א. $y = -\frac{1}{2}x - 2$ ב. $O(0, -2)$ ג. $C(-3, -8)$, $A(3, 4)$



19. בצויר שלפניך מעוין ABCD. האלכסון AC מקביל לציר ה- x .
 M – נקודת מפגש האלכסונים.
 נתון כי $B(8, 1)$, $M(8, -2)$
 א. מצא את שיעורי הקדקוד D.
 ב. מצא את משוואת האלכסון AC.
 נתון כי משוואת הישר שעליו מונחת הצלע AB היא
 $y = \frac{3}{4}x - 5$
 ג. מצא את שיעורי הנקודה A.
 ד. מצא את שטח המעוין ABCD.
תשובות: א. $D(8, -5)$ ב. $y = -2$ ג. $A(4, -2)$ ד. 24 יח"ר



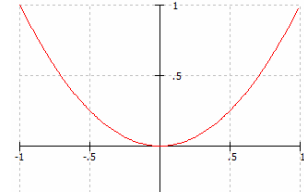
20. האלכסונים במעוין ABCD נפגשים בנקודה M (ראה ציור)
 נתון : $C(-2, 1)$, $A(6, 5)$
 א. מצא את השיעורים של הנקודה M.
 ב. מצא את משוואת האלכסון BD.
 נתון כי הצלע AB מקבילה לציר ה- x .
 ג. מהו שיעור ה- y של הקדקוד B ?
 ד. מצא את שיעור ה- x של הקדקוד B.
 ה. מצא את שטח המשולש ABC.
 ו. מצא את שטח המעוין ABCD.
תשובות: א. $M(2, 3)$ ב. $y = -2x + 7$ ג. $y_B = 5$ ד. $x_B = 1$ ה. 10 יח"ר ו. 20 יח"ר



21. במעוין ABCD נתונים הקדקדים :
 $A(-2, 5)$, $B(5, 1)$ (ראה ציור).
 אחד מאלכסוני המלבן מונח על הישר $y = -2x + 1$.
 א. מצא את משוואת האלכסון השני של המעוין.
 אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה M (ראה ציור).
 ב. מצא את שיעורי הנקודה M.
 ג. מצא את שיעורי הנקודה D ?
 ד. חשב את שטח המשולש AMB.
 ה. חשב את שטח המעוין ABCD.
תשובות: א. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ ב. $M(1, -1)$ ג. $D(-3, -3)$ ד. 15 יח"ר ה. 60 יח"ר

עד עכשיו למדנו לחשב שיפוע של קו ישר. המטרה שלנו כעת היא לחשב שיפוע של פונקציה, לאו דווקא קו ישר.

נתבונן בפונקציה $f(x) = x^2$.



ניתן לראות ששיפוע הפונקציה משתנה מנקודה לנקודה.

הישר ה"נוגע" בעקומה, נקרא משיק לעקומה באותה נקודה.

שיפוע הפונקציה בנקודה הוא שיפוע המשיק בנקודה.

פונקציית השיפועים של פונקציה $f(x)$ נתונה נקראת הנגזרת של הפונקציה ומסומנת ב $f'(x)$.

נוסחה למציאת הנגזרת :

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

תרגילים

1. גזרו של הפונקציות הבאות :

א. $f(x) = x^3$

ב. $f(x) = x^4$

ג. $f(x) = x^7$

ד. $f(x) = x$

ה. $f(x) = 1$

2. מצאו את שיפוע המשיק של הפונקציה $f(x) = x^3$ בנקודה $x = 1$.

3. מצאו את שיפוע המשיק של הפונקציה $f(x) = x^3$ בנקודה $x = 2$.

4. מצאו את שיפוע המשיק של הפונקציה $f(x) = x^4$ בנקודה $x = 1$.

תשובות: 1. א. $3x^2$ ב. $4x^3$ ג. $7x^6$ ד. 1 ה. 0 2. 3 3. 12 4. 4

ישר ה"נוגע" בפונקציה נקרא משיק. אנו נרצה לחשב את משוואת המשיק ז"א משוואת ישר.

ראינו שהנתונים שאנו צריכים כדי לחשב משוואת קו ישר הם:

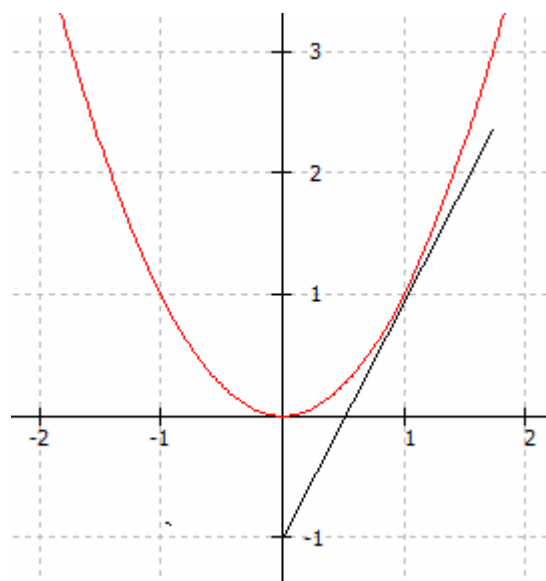
1. נקודה
2. שיפוע

נקודת ה"נגיעה" נקראת נקודת ההשקה של הישר המשיק.

אנו נחשב את משוואת המשיק ע"י:

1. נקודת השקה
2. שיפוע המשיק ז"א נגזרת הפונקציה בנקודה.

דוגמה



נמצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2$ בנקודה $x = 1$.

נמצא את נקודת ההשקה: $f(1) = 1^2$ נקודת ההשקה $(1,1)$.

נמצא את שיפוע המשיק: $f'(x) = 2x$ נציב $x = 1$ בפונקציית הנגזרת ונקבל $f'(1) = 2$

ניעזר בנוסחה למציאת משוואת קו ישר

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

משוואת המשיק: $y = 2x - 1$

תרגילים

1. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2$ בנקודה $x = 3$.
2. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^3$ בנקודה $x = 1$.
3. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4$ בנקודה $x = -1$.
4. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2$ בנקודה $x = -1$.

תשובות: 1. $y = 6x - 9$ 2. $y = 3x - 2$ 3. $y = -4x - 3$ 4. $y = -2x - 1$

מציאת משוואת משיק כאשר שיעור ה- y של נקודת ההשקה נתון

כאשר שיעור ה- y של הנקודה נתון יש לחשב תחילה את שיעור ה- x של נקודת ההשקה ואז לחשב את משוואת המשיק כמו בתרגילים הקודמים.

תרגילים

1. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^3$ אם שיעור ה- y של נקודת ההשקה שווה 8.

2. מצא את משוואת המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2$ אם נתון שערך הפונקציה בנקודת ההשקה הוא 4.

שימו לב: יש שני משיקים שמקיימים את הנתון.

תשובות: 1. $y = 12x - 16$ 2. $y = 4x - 4$ או $y = -4x - 4$

מציאת משוואת משיק כאשר שיפוע המשיק נתון

כאשר שיפוע המשיק נתון יש לחשב תחילה את שיעור ה- x של נקודת ההשקה ואז לחשב את משוואת המשיק. נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת לשיפוע הנתון.

תרגילים

1. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2$ אם שיפוע המשיק שווה ל 6.

2. מצא את משוואות שני המשיקים לפונקציה $f(x) = x^3$ ששיפועיהם 12.

תשובות: 1. $y = 6x - 9$ 2. $y = 12x - 16$ או $y = 12x + 16$

כללי גזירה נוספים

אם c הוא מספר קבוע אז $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

דוגמה

$$(4x^5)' = 4 \cdot (x^5)' = 4 \cdot 5x^4 = 20x^4$$

תרגיל

גזרו את הפונקציות הבאות :

א. $f(x) = 2x^3$

ב. $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4$

ג. $f(x) = \frac{x^7}{14}$

תשובות: א. $6x^2$ ב. x^3 ג. $0.5x^6$

הנגזרת של סכום שתי פונקציות שווה לסכום הנגזרות של הפונקציות.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

דוגמה

$$(2x^3 + 4x^2 + 5)' = 6x^2 + 8x$$

הנגזרת של הפרש שתי פונקציות שווה להפרש הנגזרות של הפונקציות.

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

תרגילים

גזרו את הפונקציות הבאות :

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$

ב. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^4 + 2x^2$

ג. $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{1}{5}$

ד. $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 5}{7}$

ה. $f(x) = \frac{2x^3 - 3x - 7}{5}$

תשובות: א. $3x^2 + 4x + 3$ ב. $\frac{4}{3} \cdot x^3 + 4x$ ג. $x^2 + 2x$ ד. $\frac{6x^2 - 8x + 1}{7}$ ה. $\frac{6x^2 - 3}{5}$

1. נתון שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
2. נתון שיעור ה- y של נקודת ההשקה.
3. נתון שיפוע המשיק.

הערה 1

כאשר נתון הסוג הראשון ז"א שיעור ה- x של נקודת ההשקה יש משיק אחד שמקיים את הנתון.

כאשר נתון הסוג השני ז"א שיעור ה- y של נקודת ההשקה ייתכן שיהיו מספר משיקים שמקיימים את הנתון. אם יש לפונקציות מספר נקודות עם אותו שיעור - y .

כאשר נתון הסוג השלישי ז"א שיפוע המשיק ייתכן שיהיו מספר משיקים שמקיימים את הנתון.
אם יש משיקים לפונקציה שמקבילים זה לזה.

הערה 2

כאשר מבקשים מאיתנו משוואת משיק, שיפוע המשיק או נקודת השקה, עלינו לבדוק באיזה סוג נתון מדובר.

תרגילים – מציאת משוואת המשיק כאשר נתון שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

1. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 4x - 2$ בנקודה $x = 1$.

2. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - 2x - 3$ בנקודה $x = 2$.

3. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x$ בנקודה $(2, 4)$.

4. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{3}$ בנקודה $x = 3$.

5. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x - 3$ בנקודה $(2, -6)$.

תשובות: 1. $y = 6x - 3$ 2. $y = 4x - 11$ 3. $y = 10x - 16$ 4. $y = \frac{4}{3}x - 4$ 5. $y = -x - 4$

מציאת משוואת המשיק כאשר נתון שיעור ה- y של נקודת ההשקה.

הערה 1

יש מספר אפשרויות לרשום שיעור y של נקודת השקה כנתון.

אפשרות 1: שיעור ה- y של הנקודה הוא....

אפשרות 2: ערך הפונקציה בנקודת ההשקה...

אפשרות 3: בנקודת החיתוך עם ציר ה- x ז"א שיעור ה- y של הנקודה הוא 0.

אפשרות 4: בנקודת החיתוך עם הישר $y = a$ ז"א שיעור ה- y של הנקודה הוא a .

הערה 2

בהינתן שיעור ה- y של הנקודה ייתכן שיש יותר מפתרון אחד.

תרגילים

1. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 6x + 7$ בנקודות שבהן שיעור ה- y הוא 2.

2. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 3$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

3. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 6x + 8$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

4. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = 2x^2 - 6x + 7$ בנקודות שבהן ערך הפונקציה הוא 3.

5. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = 3x^2 - x$ בנקודות שבהן ערך הפונקציה הוא 10.

6. מצאו את המשוואות של המשיקים לפונקציה $f(x) = 4x^2 - 2x - 7$ בנקודות החיתוך עם הישר $y = -1$.

7. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = -x^2 - 6x + 2$ בנקודות החיתוך עם הישר $y = 7$.

8. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = 3x^2 + x - 14$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

תשובות: 1. $y = 4x - 18, y = -4x + 6$ 2. $y = -2x + 2, y = 2x - 6$ 3. $y = -2x + 4, y = 2x - 8$

4. $y = 2x - 1, y = -2x + 5.4$ 5. $y = 11x - 12, y = -11x - 8\frac{1}{3}$ 6. $y = -10x - 11$

7. $y = 10x - 16$ 8. $y = 4x + 27, y = -4x + 3$

מציאת משוואת המשיק כאשר נתון שיפוע המשיק

הערה 1

יש מספר אפשרויות לרשום שיפוע המשיק כנתון.

אפשרות 1 : שיפוע המשיק לפונקציה הוא.

אפשרות 2 : המשיק מקביל לישר אחר.

אפשרות 3 : המשיק מקביל למשיק אחר.

אפשרות 4 : המשיק מאונך לישר אחר.

הערה 2

בהינתן שיפוע המשיק ייתכן שיש יותר מפתרון אחד.

תרגילים

1. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 6x + 7$ ששיפועו 2.

2. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ששיפועו 4.

3. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 6x + 8$ ששיפועם -3.

4. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = 2x^2 - 6x + 7$, המקביל לציר ה- x .

5. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x$, המקבילים לציר ה- x .

6. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 4x^2 - 2x - 7$, המקביל לישר $y = 6x + 5$.

7. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = -x^3 - 6x$, המקבילים לישר $y = -9x + 7$.

8. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = 3x^2 + x - 14$, המאונך לישר $y = -\frac{1}{5}x + 1$.

תשובות: 1. $y = 2x - 9$ 2. $y = 4x - 13$ 3. $y = -3x + 6$, $y = -3x + 10$ 4. $y = \frac{5}{2}$

5. $y = -4$, $y = -12\frac{19}{27}$ 6. $y = 6x - 11$ 7. $y = -9x - 2$, $y = -9x + 2$ 8. $y = 5x - \frac{46}{3}$

סיכום – מציאת משוואת משיק

ישנם שלושה סוגי נתונים אפשריים :

1. שיעור ה- x .

2. שיעור ה- y .

3. שיפוע.

לכל סוג יש מספר ניסוחים אפשריים שאותם הראינו במהלך הפרק.

שימו לב: ייתכנו סעיפים נוספים שבהם תצטרכו להיעזר במשוואת המשיק שמצאתם.

כאשר מבקשים משוואת משיק חובה לזהות את הנתון בשאלה.

שלבי עבודה במציאת משוואת משיק כאשר נתון שיעור ה- x של הנקודה

שלב 1 –

הצבת הנתון בפונקציה וקבלת שיעור ה- y של הנקודה.

שלב 2 –

הצבת הנתון בפונקציית הנגזרת וקבלת שיפוע המשיק.

שלב 3 –

משלב 1 והנתון קיבלנו את הנקודה (x_1, y_1) , משלב 2 קיבלנו את שיפוע המשיק m .

שימוש בנוסחה למציאת משוואת הקו הישר $y - y_1 = m(x - x_1)$.

שלבי עבודה במציאת משוואת משיק כאשר נתון שיעור ה- y של הנקודה

שלב 1 –

משווים את הפונקציה לשיעור ה- y שנתון ופותרים את המשוואה שמתקבלת.

שלב 2 –

עבור כל תשובה משלב 1 נקבל משיק.

נציב את כל אחת מהתשובות בשלב 1 בפונקציית הנגזרת ולכל תשובה נקבל שיפוע.

שלב 3 –

משלב 1 והנתון קיבלנו את הנקודה (x_1, y_1) , משלב 2 קיבלנו את שיפוע המשיק m .

שימוש בנוסחה למציאת משוואת הקו הישר $y - y_1 = m(x - x_1)$.

שלבי עבודה במציאת משוואת משיק כאשר נתון שיפוע המשיק

שלב 1 –

משווים את פונקציית הנגזרת לשיפוע המשיק הנתון.

שלב 2 –

עבור כל תשובה משלב 1 נקבל משיק.

נציב את כל אחת מהתשובות בשלב 1 בפונקציה הנתונה ונקבל את שיעור ה- y של

הנקודה.

שלב 3 –

משלב 1 ומשלב 2 נקבל את הנקודה (x_1, y_1) , מהנתון יש לנו את שיפוע המשיק m .

שימוש בנוסחה למציאת משוואת הקו הישר $y - y_1 = m(x - x_1)$.

שימו לב: בחלק מהמקרים מתבקשים לבצע את אחד משלבי העבודה בסעיפים קודמים.

תרגילים מכל הסוגים במציאת משוואת משיק

1. לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 6x$ מעבירים משיק בנקודה $x = 2$.
א. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה.
ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
2. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$.
א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
ב. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאתם בסעיף א'.
ג. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
3. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 - 5x - 4$.
א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
ב. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה הנתונה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .
ג. מצאו את נקודת החיתוך של המשיקים שמצאתם בסעיף א'.
4. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 7x + 10$.
א. מצאו את המשוואות של המשיקים לפונקציה הנתונה בנקודות החיתוך עם הישר $y = 4$.
ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני המשיקים שמצאתם בסעיף א'.
5. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^2 - 8x + 10$.
א. מצאו נקודה, שבה שיפוע המשיק הוא 0.
ב. מצאו את משוואת המשיק בנקודה שמצאתם בסעיף א'.
ג. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- y .
6. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, המקבילים לציר ה- x .
7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + 2x - 5$ מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה שמקבילים לישר $y = 8x - 1$.
8. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 5$.
א. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה $x = 1$.
ב. מצאו את משוואת המשיק שמקביל לישר שאת משוואתו מצאתם בסעיף א'.
9. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2$. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה הנתונה שמקביל לישר $y = -x$.
10. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$. מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה הנתונה שמקבילים לישר $y - 2x + 5 = 0$.

$$11. \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$$

- א. מצאו את משוואות המשיקים שמאונכים לישר $y = -2x + 1$.
 ב. מצאו את נקודת החיתוך בין הישר $y = -2x + 1$ לבין כל אחד מהישרים שמצאתם בסעיף א.

$$12. \text{ נתונה בפונקציה } f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$$

- א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בכל אחת מהנקודות שמצאתם בסעיף א'.

$$13. \text{ נתון ששיפוע המשיק לפונקציה } f(x) = x^2 - 3x \text{ שווה ל-} 1$$

- א. מצאו את נקודת ההשקה.
 ב. מצאו את משוואת המשיק.
 ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה שמאונך לישר שאת משוואתו מצאתם בסעיף ב'.

$$14. \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = x^3 + 4x$$

- א. הסבירו מדוע הפונקציה חותכת את ציר ה- x רק בנקודה אחת.
 ב. מצאו את משוואת המשיק בנקודת החיתוך עם ציר ה- x .
 ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה $(1, 5)$.
 ד. מצאו את נקודת החיתוך בין המשיק שמצאתם בסעיף ב' לבין המשיק שמצאתם בסעיף ג'.

תשובות: 1. א. $y = -2x - 4$ ב. $(-2, 0), (0, -4)$ 2. א. $(0, -1)$ ב. $y = 2x - 1$ ג. $(\frac{1}{2}, 0)$

3. א. $(-1, 0), (-4, 0)$ ב. $y = -3x - 3, y = 3x + 12$ ג. $(-2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$

4. א. $y = -5x + 9, y = 5x - 26$ ב. $(3\frac{1}{2}, -8\frac{1}{2})$ 5. א. $(2, 2)$ ב. $y = 2$ ג. $(0, 2)$

6. $y = 4, y = 0$ 7. $y = 8x + 2\frac{1}{3}, y = 8x - 18\frac{1}{2}$ 8. $y = 3x - 6, y = 3x - 4\frac{22}{27}$

9. $y = -x + \frac{4}{27}$ 10. $y = 2x + \frac{4}{27}, y = 2x$ 11. א. $y = \frac{1}{2}x, y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}$ ב. $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}), (\frac{13}{30}, \frac{1}{5})$

12. א. $(0, 0), (1, 0), (3, 0)$ ב. $y = 3x, y = -2x + 2, y = 6x - 18$

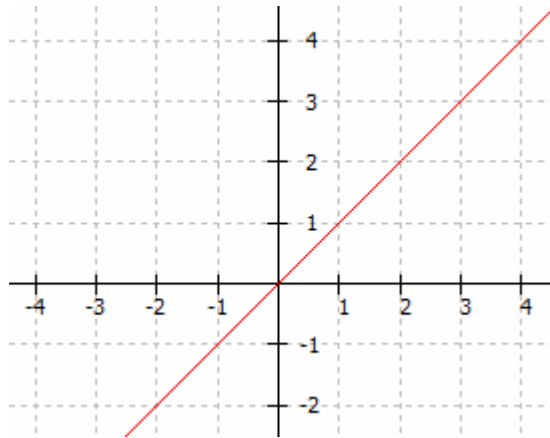
13. א. $(2, -2)$ ב. $y = x - 4$ ג. $y = -x - 1$ 14. א. $(0, 0)$ ב. $y = 4x$ ג. $y = 7x - 2$ ד. $(\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$

הזווית שבין המשיק לכיוון החיובי עם ציר ה- x

מטרה: מציאת זווית בין ישר נתון לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x .

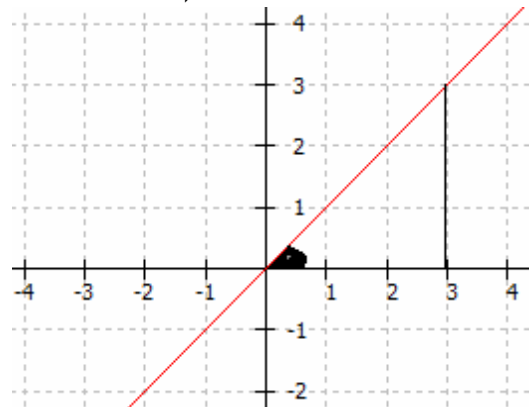
דוגמה

נמצא את הזווית בין הישר $y = x$ לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x .



נבחר נקודה כלשהי ברביע הראשון ומהנקודה

שבחרנו נעביר ישר שמאונך לציר ה- x .



קיבלנו משולש ישר זווית ושווי שוקיים. הזווית המתקבלת היא בת 45° .

שימו לב:

בחירת הנקודה לא תשנה את גודל הזווית המבוקשת.

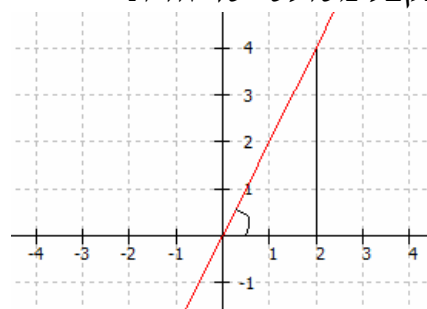
לא תמיד נקבל משולש שווה שוקיים, כך שלא נוכל להיעזר בכלים גיאומטריים כדי לחשב את גודל הזווית.

דוגמה

נמצא את הזווית בין הישר $y = 2x$ לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x .

כמו בדוגמה הקודמת נבחר נקודה כלשהי ברביע הראשון ומהנקודה שבחרנו נעביר ישר שמאונך לציר ה- x .

נקבל משולש ישר זווית



בעזרת הגדרת הטנגנס נקבל $\tan \alpha = \frac{4}{2}$ ואז $\alpha = 63.43^\circ$.

שימו לב שגם שיפוע הישר מתקבל באותו אופן $m = \frac{4-0}{2-0}$.
באופן כללי נקבל ש $\tan \alpha = m$.

נוסחה המקשרת בין הזווית לשיפוע הישר

בהינתן ישר ששיפועו m , נסמן את הזווית בין הישר לכיוון החיובי של ציר ה- x ונקבל את הנוסחה

$$\tan \alpha = m$$

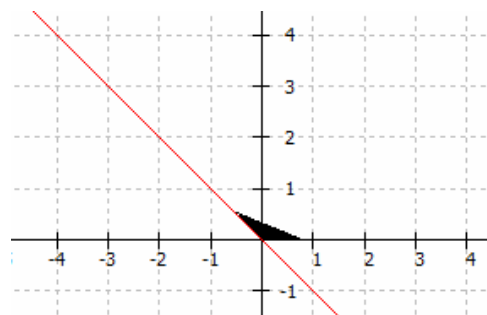
הערה

אם הישר יורד - שיפועו שלילי, ובחישוב הזווית במחשבון נקבל תוצאה שלילית.

נוסיף לתוצאה 180° ונקבל את הזווית המבוקשת.

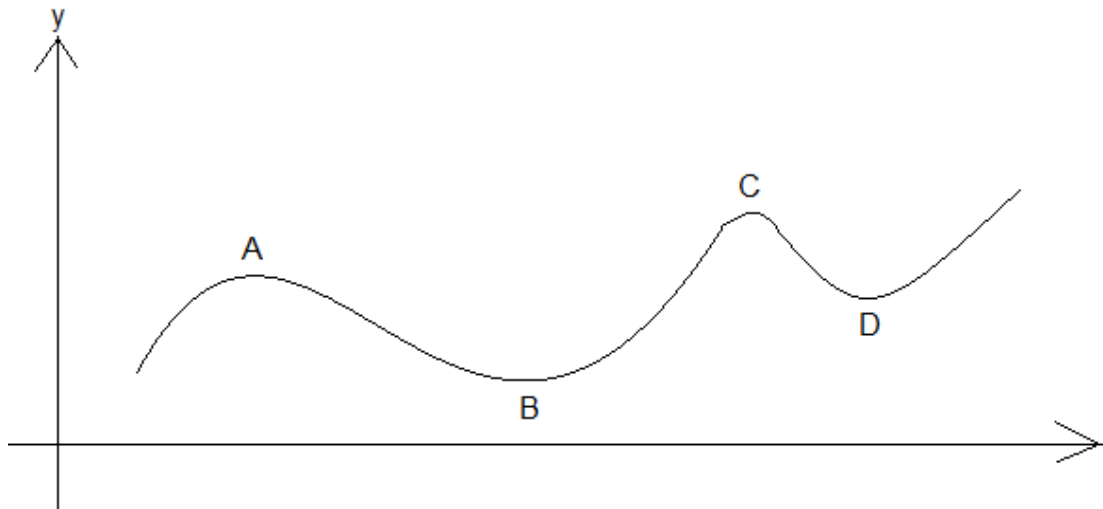
דוגמה

נחשב את הזווית בין הישר $y = -x$ לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x



מהנוסחה נקבל $\tan \alpha = -1$, מחישוב במחשבון נקבל -45° והתוצאה היא 135° .

1. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + x - 2$. בנקודה $(0, -2)$ שעל גרף הפונקציה העבירו משיק לפונקציה.
 - א. מצאו את משוואת המשיק.
 - ב. מצאו את הזווית הנוצרת בין המשיק לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 2. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 7x + 1$. בנקודה $(3, -11)$ שעל גרף הפונקציה העבירו משיק לפונקציה.
 - א. מצאו את משוואת המשיק.
 - ב. מצאו את הזווית הנוצרת בין המשיק לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 3. נתונה הפונקציה $f(x) = -2x^3 + 5x - 2$. בנקודה $x = 1$.
 - א. מצאו את משוואת המשיק.
 - ב. מצאו את הזווית הנוצרת בין המשיק לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 4. נתונה הפונקציה $f(x) = -2x^2 + 9x - 7$.
 - א. מצאו את הנקודה על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכה יוצר זווית בת 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 - ב. מצאו את משוואת המשיק שיוצר זווית בת 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 - ג. מצאו את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
 5. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x - 7$.
 - א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית בת 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 - ב. מצאו את משוואות המשיקים הנ"ל.
 6. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - x - 5$.
 - א. מצאו את הנקודה על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכה יוצר זווית בת 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 - ב. מצאו את משוואת המשיק שיוצר זווית בת 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 - ג. מצאו את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
 7. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7$.
 - א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית בת 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 - ב. מצאו את משוואות המשיקים הנ"ל.
- תשובות: 1. א. $y = x - 2$. ב. 45° . 2. א. $y = -x - 8$. ב. 135° . 3. א. $y = -x + 2$. ב. 45° . 4. א. $(2, 3)$. ב. $y = x + 1$. ג. $(-1, 0)$, $(0, 1)$. 5. א. $(1, -8)$, $(-1, -6)$. ב. $y = x - 5$, $y = x - 9$. 6. א. $(0, -5)$. ב. $y = -x - 5$. ג. $(-5, 0)$, $(0, -5)$. 7. א. $(1, -8)$, $(\frac{1}{3}, -7\frac{5}{27})$. ב. $y = -x - 6\frac{23}{27}$, $y = -x - 7$.



נקודת מקסימום מקומית היא נקודה שערכה גבוה ביותר בסביבה מסוימת.
למשל:

הנקודות A, C הן נקודות מקסימום מקומיות.
תכונות חשובות¹:

- הנגזרת שווה לאפס
- משמאל לנקודה הפונקציה עולה ואז הנגזרת חיובית²
- מימין לנקודה הפונקציה יורדת ואז הנגזרת שלילית³

נקודת מינימום מקומית היא נקודה שערכה נמוך ביותר בסביבה מסוימת.
למשל:

הנקודות B, D הן נקודות מינימום מקומיות.

- הנגזרת שווה לאפס
- משמאל לנקודה הפונקציה יורדת ואז הנגזרת שלילית
- מימין לנקודה הפונקציה עולה ואז הנגזרת חיובית

נקודות המינימום והמקסימום נקראות נקודות קיצון.

¹ נדון רק במקרה שהנגזרת קיימת בכל תחום ההגדרה
² הנגזרת אי שלילית ואנחנו נדון רק במקרה שהנגזרת חיובית
³ הנגזרת לא חיובית ואנחנו נדון רק במקרה שהנגזרת שלילית

מציאת נקודות קיצון בפרבולה

שלבי עבודה במציאת נקודת קיצון

- שלב 1 : גוזרים את הפונקציה ומשווים לאפס.
שלב 2 : בודקים את סימני הנגזרת של הפונקציה מימין ומשמאל לנקודה.
שלב 3 : קובעים האם הנקודה היא נקודת מינימום או נקודת מקסימום על פי התכונות שרשמנו.

שלב 4 : מציבים את שיעור ה- x בפונקציה ומקבלים את שיעור ה- y של הנקודה.

דוגמה

מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, וקבעו את סוגה.

פתרון

שלב 1 : נגזור ונשווה לאפס

$$f'(x) = -2x + 6$$

$$-2x + 6 = 0$$

$$x = 3$$

שלב 2 : נבנה טבלה ונבדוק את סימני הנגזרת של הפונקציה מימין ומשמאל לנקודה

מספרים להצבה	2		4
x	$x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
y'	+	0	-
y	↑	מקסימום	↓

$$f'(2) = -2 \cdot 2 + 6 > 0$$

$$f'(4) = -2 \cdot 4 + 6 < 0$$

שלב 3 : הנקודה $x = 3$ היא נקודת מקסימום.

שלב 4 :

$$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5$$

$$f(3) = 4$$

נקודת מקסימום (3,4).

1. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 7$. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 2. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^2 - 12x - 7$. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 3. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + 6x + 7$. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 7}{3}$. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 8x$. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 6. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
 א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 ב. מצאו את נקודות החיתוך עם ציר ה- x .
 7. נתונה הפונקציה $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$.
 א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 ב. מצאו את נקודות החיתוך עם ציר ה- x .
 ג. מצאו את משוואות המשיקים בנקודות החיתוך עם ציר ה- x .
 8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 4x + 3$.
 א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 ב. מצאו את משוואת המשיק בנקודת החיתוך עם ציר ה- y .
 9. נתונה הפונקציה $f(x) = -3x^2 - 12x + 3$.
 א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 ב. לגרף הפונקציה מעבירים משיק ששיפועו -6 . מצאו את נקודת ההשקה.
 ג. מצאו את משוואת המשיק שעובר בנקודה שמצאתם בסעיף קודם.
 10. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{7} - 3$. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
- תשובות: 1. $(2, 3)$ מינימום 2. $(3, -25)$ מינימום 3. $(3, 16)$ מקסימום 4. $(-1, 3)$ מקסימום 5. $(8, -32)$ מינימום
 6. א. $(2, -1)$ מינימום ב. $(1, 0), (3, 0)$ 7. א. $(2, 2)$ מקסימום ב. $(1, 0), (3, 0)$ ג. $y = -4x + 12, y = 4x - 4$
 8. א. $(4, -5)$ מינימום ב. $y = -4x + 3$ 9. א. $(-2, 15)$ מקסימום ב. $(-1, 12)$ ג. $y = -6x + 6$
 10. $(2, -3\frac{4}{7})$ מינימום

מציאת תחומי עליה וירידה – פרבולה
שלבי עבודה במציאת נקודת קיצון

שלב 1: מוצאים את נקודת הקיצון

שלב 2: מסיקים מבניית הטבלה את תחומי העלייה והירידה.

דוגמה

נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$

- א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגה.
 ב. באילו תחומים הפונקציה עולה, ובאילו היא יורדת?

פתרון

נגזור ונשווה לאפס

$$f'(x) = 4x + 8$$

$$4x + 8 = 0$$

$$x = -2$$

נבנה טבלה ונבדוק את סימני הנגזרת של הפונקציה מימין ומשמאל לנקודה

מספרים להצבה	-3		0
x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x$
y'	-	0	+
y	↓	מינימום	↑

$$f'(-3) = 4 \cdot (-3) + 8 < 0$$

$$f'(4) = 4 \cdot 0 + 8 > 0$$

נקודת מינימום $x = -2$.

נציב בפונקציה ונקבל

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) - 5$$

$$f(-2) = -13$$

א. נקודת המינימום $(-2, -13)$.

ב. ניתן להסיק מהטבלה:

הפונקציה עולה כאשר $-2 < x$ ויורדת כאשר $x < -2$.

תרגילים

1. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 - 6x$
 - א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 - ב. באילו תחומים הפונקציה עולה, ובאילו היא יורדת?
 - ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

 2. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 - 6x + 6$
 - א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 - ב. באילו תחומים הפונקציה עולה, ובאילו היא יורדת?
 - ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה הנתונה שמקביל לישר $y = -4x + 1$.

 3. נתונה הפונקציה $f(x) = -2x^2 + 4x + 2$
 - א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 - ב. באילו תחומים הפונקציה עולה, ובאילו היא יורדת?
 - ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה הנתונה שמקביל לישר $y + 4x = 1$.

 4. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 6x + 6$
 - א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 - ב. באילו תחומים הפונקציה עולה, ובאילו היא יורדת?
 - ג. מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה בנקודות שבהן שיעור ה- y של הפונקציה שווה ל-1.
 - ד. מצאו את נקודת החיתוך של המשיקים שמצאתם בסעיף א.

 5. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$
 - א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 - ב. באילו תחומים הפונקציה עולה, ובאילו היא יורדת?
 - ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה הנתונה שמקביל לציר ה- x .

 6. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + 2x - 3$
 - א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 - ב. באילו תחומים הפונקציה עולה, ובאילו היא יורדת?
 - ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה הנתונה, המאונך לישר $y = \frac{x+3}{2}$.

 7. נתונה הפונקציה $f(x) = -2x^2 - 6x$
 - א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 - ב. באילו תחומים הפונקציה עולה, ובאילו היא יורדת?
 - ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה הנתונה, המאונך לישר $2y - x = 3$.
- תשובות: 1. א. $(-3, -27)$ מקסימום ב. עלייה $x < -3$ ירידה $x > -3$ ג. $(-6, 0)$, $(0, 0)$ 2. א. $(-3, -21)$ מקסימום ב. עלייה $x < -3$ ירידה $x > -3$ ג. $y = -4x + 7$ 3. א. $(1, 4)$ מקסימום ב. עלייה $x < 1$ ירידה $x > 1$ ג. $y = -4x + 1$ 4. א. $(3, -3)$ מינימום ב. עלייה $x < 3$ ירידה $x > 3$ ג. $y = -4x + 5$, $y = 4x - 19$ 5. א. $(1, -2)$ מינימום ב. עלייה $x < 1$ ירידה $x > 1$ ג. $y = -2$ 6. א. $(1, -2)$ מקסימום ב. עלייה $x < 1$ ירידה $x > 1$ ג. $y = -2x + 1$ 7. א. $(-1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ מקסימום ב. עלייה $x > -1\frac{1}{2}$ ירידה $x < -1\frac{1}{2}$ ג. $y = -2x + 2$

שרטוט פרבולה

הערה 1

שלבי עבודה לקראת שרטוט פרבולה דומים לשלבי עבודה בשרטוט פולינום.

שלבי עבודה

שלב 1: תחום הגדרה

פולינום היא פונקציה שמוגדרת לכל x , בהמשך נלמד על פונקציות שלא מוגדרות לכל x וכדאי להתחיל להתרגל כבר עכשיו לרשום תחום הגדרה של פונקציה.

שלב 2: נקודות חיתוך עם הצירים

מציבים 0 במקום x ומקבלים נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
משווים את הפונקציה לאפס ופתרון המשוואה נותן נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

שלב 3: מציאת נקודת קיצון ותחומי עליה וירידה

שימו לב: לפרבולה יש נקודת קיצון אחת שנקראת קודקוד הפרבולה, אך יש פונקציות ללא נקודות קיצון או עם יותר מנקודת קיצון אחת.

שלב 4: משרטטים את הפונקציה על פי המסקנות שהתקבלו בשלבים הקודמים.

הערה 2

לעיתים נוכל להיעזר בשרטוט כדי לענות על שאלות שקשורות לגרף הפונקציה.
שאלה כזאת בד"כ תופיע כסעיף לאחר השרטוט.

דוגמה

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x - 5$

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודת הקיצון?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה?

פתרון

- הפונקציה מוגדרת לכל x .
- נגזור ונשווה לאפס

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$2x - 4 = 0$$

$$x = 2$$

נבנה טבלה ונבדוק את סימני הנגזרת של הפונקציה מימין ומשמאל לנקודה

מספרים להצבה	1		3
x	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
y'	-	0	+
y	↓	מינימום	↑

$$f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 < 0$$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 > 0$$

נקודת מינימום $x = 2$.
נציב בפונקציה ונקבל

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5$$

$$f(2) = -9$$

נקודת המינימום $(2, -9)$.

ג. ניתן להסיק מהטבלה:

הפונקציה עולה כאשר $x > 2$ ויורדת כאשר $x < 2$.

ד. נמצא חיתוך עם ציר y .

$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 - 5$$

נקודת חיתוך עם ציר y : $(0, -5)$

נקודות חיתוך עם ציר x :

נשווה את הפונקציה לאפס ונקבל

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

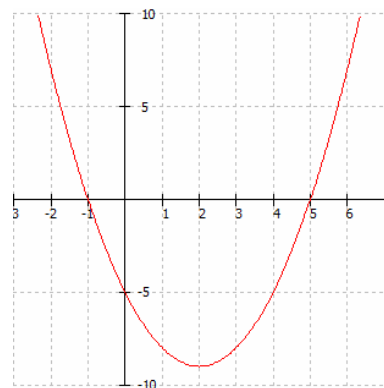
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -1$$

נקודות החיתוך עם ציר x הם: $(5, 0)$ ו- $(-1, 0)$.

ה.



ו. מהשרטוט ניתן להסיק ש

תחומי החיוביות $x > 5$ או $x < -1$ ותחומי השליליות $-1 < x < 5$.

1. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 - 7x + 8$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודת הקיצון?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה?

2. נתונה הפונקציה $f(x) = (2x - 1)^2$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודת הקיצון?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה?

3. נתונה הפונקציה $f(x) = (x - 1)^2 - 4$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודת הקיצון?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- בנקודה $(2, -3)$ שעל גרף הפונקציה העבירו משיק
 - מצאו את משוואת המשיק
 - שרטטו את המשיק ואת הפונקציה באותה מערכת צירים.
 - מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם הצירים.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = -2x^2 + 7x - 6$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודת הקיצון?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- בנקודה $(2, 0)$ שעל גרף הפונקציה העבירו משיק
 - מצאו את משוואת המשיק
 - שרטטו את המשיק ואת הפונקציה באותה מערכת צירים.
 - מצאו את הזווית שבין המשיק לכיוון החיובי של ציר ה- x .

5. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + 7x + 8$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודת הקיצון?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- היעזרו בשרטוט וקבעו האם הפונקציה עולה או יורדת בנקודה שבה $x = -1$, נמקו!

6. נתונה הפונקציה $f(x) = -2x^2 + 16x - 14$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצאו את נקודת הקיצון?
- ג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- ד. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה
 - i. בנקודה אחת.
 - ii. בשתי נקודות.
 - iii. באף נקודה.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = -3x^2 + 5x + 12$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצאו את נקודת הקיצון?
- ג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- ד. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. כמה נקודות חיתוך יש לישר $y = 9$ עם גרף הפונקציה? נמק!

8. נתונה הפונקציה $f(x) = (x - 2)(x + 3)$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצאו את נקודת הקיצון?
- ג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- ד. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה שמקביל לישר $y = x$.
- ז. שרטטו באותה מערכת צירים את הפונקציה הנתונה, הישר $y = x$ ואת המשיק שאת משוואתו מצאתם בסעיף קודם.

תשובות:

1. א. כל x

ב. מקסימום

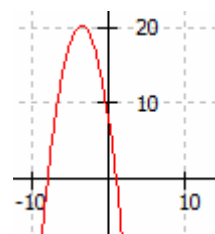
$$\left(-3\frac{1}{2}, 20\frac{1}{4}\right)$$

ג. עלייה $x < -3\frac{1}{2}$

ירידה $-3\frac{1}{2} < x$

ד. $(-8,0), (1,0), (0,8)$

ה.



ו. חיוביות $-8 < x < 1$

שליליות $x < -8$ או $1 < x$

2. א. כל x

ב. מינימום

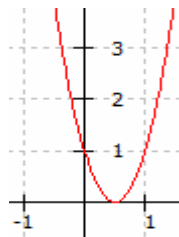
$$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

ג. עלייה $\frac{1}{2} < x$

ירידה $x < \frac{1}{2}$

ד. $(0,1), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

ה.



ו. חיוביות $x \neq \frac{1}{2}$

אין x

3. א. כל x

ב. מינימום

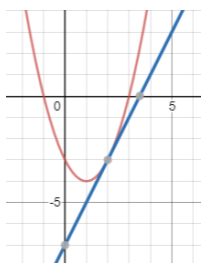
$$(1, -4)$$

ג. עלייה $1 < x$

ירידה $x < 1$

ד. $(0, -3), (-1,0), (3,0)$

ה. ו.ii



י. $y = 2x - 7$

iii. $(0, -7), \left(3\frac{1}{2}, 0\right)$

4. א. כל x

ב. מקסימום

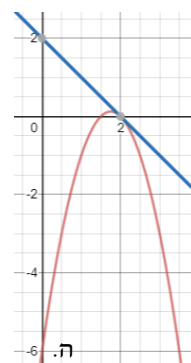
$$\left(1\frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right)$$

ג. עלייה $x < \frac{7}{4}$

ירידה $x > \frac{7}{4}$

ד. $(2,0), \left(1\frac{1}{2}, 0\right), (0, -6)$

ה. ו.ii



י. $y = -x + 2$

iii. 135°

5. א. כל x

ב. מקסימום

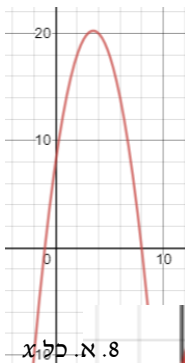
$$\left(3\frac{1}{2}, 20\frac{1}{4}\right)$$

ג. עלייה $x < 3\frac{1}{2}$

ירידה $3\frac{1}{2} < x$

ד. $(8,0), (-1,0), (0,8)$

ה.



ו. עולה

6. א. כל x

ב. מקסימום

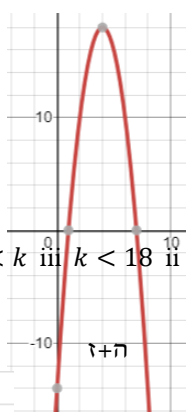
$$(4, 18)$$

ג. עלייה $x < 4$

ירידה $4 < x$

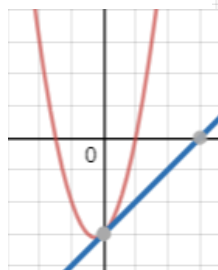
ד. $(7,0), (1,0), (0, -14)$

ה.



י. $k = 18$ ii. $k < 18$ iii. $18 < k$

ה. ו.



8. א. כל x

ב. מינימום

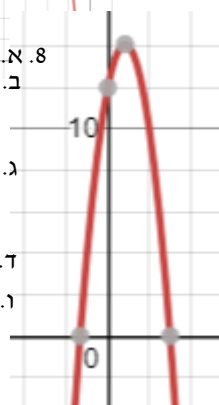
$$\left(-\frac{1}{2}, -6\frac{1}{4}\right)$$

ג. עלייה $-\frac{1}{2} < x$

ירידה $x < -\frac{1}{2}$

ד. $(-3,0), (2,0), (0, -6)$

ו. $y = x - 6$



7. א. כל x

ב. מקסימום

$$\left(\frac{5}{6}, 14\frac{1}{12}\right)$$

ג. עלייה $x < \frac{5}{6}$

ירידה $\frac{5}{6} < x$

ד. $(3,0), \left(-1\frac{1}{3}, 0\right), (0, 12)$

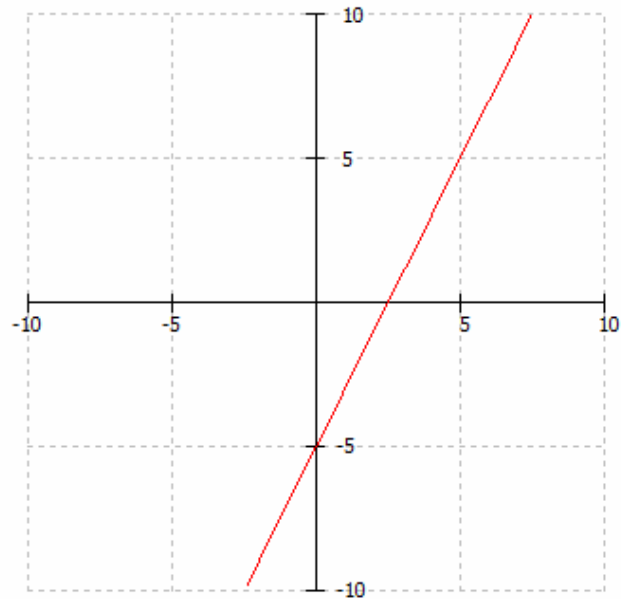
ו. שתי נקודות

מציאת נקודות קיצון - פולינום

עד עכשיו למדנו לשרטט פולינומים ממעלה ראשונה ופולינומים ממעלה שניה.

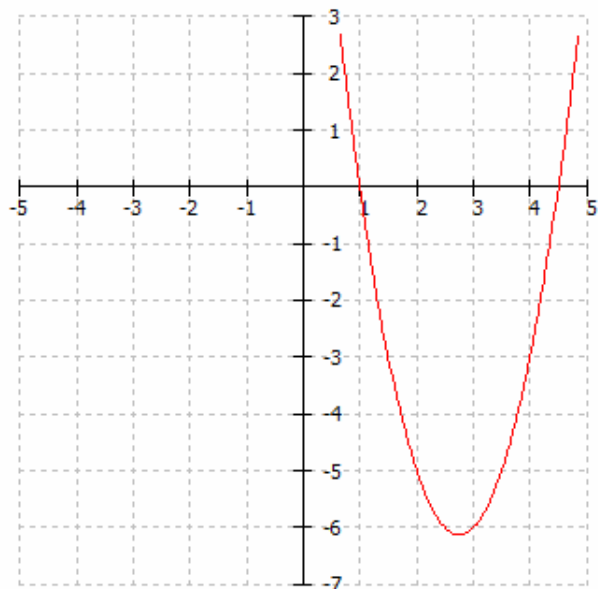
פולינום ממעלה ראשונה הוא קו ישר.

למשל: $f(x) = 2x - 5$



לפולינום ממעלה ראשונה אין נקודות קיצון בתחום $\mathbb{R}$.

פולינום ממעלה שניה הוא פרבולה.



לפולינום ממעלה שניה יש נקודת קיצון אחת בתחום $\mathbb{R}$.

נמצא נקודות קיצון גם עבור פולינומים ממעלה גבוהה מ-2.

כאשר הפולינום ממעלה גבוהה מ-2 לא ניתן לדעת מראש כמה נקודות קיצון יש לפונקציה.

שלבי עבודה במציאת נקודת קיצון

שלב 1 : גוזרים את הפונקציה ומשווים לאפס.

שלב 2 : בונים טבלה ורושמים את כל הערכים משלב 1 מהקטן לגדול כאשר לכל ערך מתאימים עמודה ועוד 2 עמודות ריקות אחת מימין לנקודה ואחת משמאל לנקודה.

שלב 3 : עבור כל העמודות הריקות בודקים מהו סימן הנגזרת עבור ערך שקטן מהערך שרשום בעמודה שמימין לו וגדול מהערך שרשום בעמודה שמאלו.

שלב 4 : קובעים האם הנקודה היא נקודת מינימום או נקודת מקסימום על פי הטבלה שהתקבלה.

שלב 5 : מציבים את שיעור ה- x בפונקציה ומקבלים את שיעור ה- y של הנקודה.

דוגמה

מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 5$, וקבעו את סוגן.

פתרון

שלב 1 : נגזור ונשווה לאפס

$$f'(x) = -3x^2 + 4x - 1$$

$$-3x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

שלב 2 : נבנה טבלה ונרשום את כל הערכים משלב 1 מהקטן לגדול כאשר לכל ערך מתאימים עמודה ועוד 2 עמודות ריקות אחת מימין לנקודה ואחת משמאל לנקודה.

x		$x = \frac{1}{3}$		$x = 1$	
y'					
y					

שלב 3 : עבור כל העמודות הריקות בודקים מהו סימן הנגזרת עבור ערך שקטן מהערך שרשום בעמודה שמימין לו וגדול מהערך שרשום בעמודה שמשמאלו.

מספרים להצבה	0		$\frac{2}{3}$		2
x	$x < \frac{1}{3}$	$x = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
y'	–	0	+	0	–
y	↓	מינימום	↑	מקסימום	↓

$$f'(0) = -3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 1 < 0$$

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = -3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2}{3} - 1 > 0$$

$$f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1 < 0$$

שלב 4

נציב בפונקציה את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון.

$$f(1) = -1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 5$$

$$f(1) = -5$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 5$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -5\frac{4}{27}$$

נקודת מקסימום : $(1, -5)$

נקודת מינימום : $\left(\frac{1}{3}, -5\frac{4}{27}\right)$

תרגילים

1. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x + 7$. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.
 2. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 + x^2 + 5x - 6$. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.
 3. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 + 5x$. הוכיחו שלפונקציה אין נקודות קיצון.
 4. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 - 12x$. הוכיחו שלפונקציה אין נקודות קיצון.
 5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^4 - 16x$.
 - א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 - ב. לגרף הפונקציה מעבירים משיק ששיפועו -14 – מצאו את נקודת ההשקה.
 6. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 3x$.
 - א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
 - ב. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה שיוצר זווית בת 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 7. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2$.
 - א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.
 - ב. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה $x = -1$.
 8. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
 - א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.
 - ב. מצא את משוואת המשיק לפונקציה שמאונך לישר $3y - x - 1 = 0$.
 9. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 6x^2$.
 - א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.
 - ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 - ג. מצאו את משוואות המשיקים של הפונקציה בנקודות החיתוך עם הצירים.
 - ד. מצאו את נקודת החיתוך של שני המשיקים שאת משוואתם מצאתם בסעיף ג'.
- תשובות: 1. $(2, -9)$ מינימום, $(-2, 23)$ מקסימום 2. $(-1, -9)$ מינימום, $(\frac{5}{3}, \frac{13}{27})$ מקסימום
3. א. $(2, -24)$ מינימום ב. $(1, -15\frac{1}{2})$ א. $(1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$ ב. $y = x - 4$ 7. א. $(1, -2)$ מינימום, $(-2, 2)$ מקסימום 8. א. $(-2\frac{1}{2}, 39\frac{1}{16})$ מקסימום ב. $y = 12x + 6$ 8. א. $(2, -2)$ מינימום, $(0, 2)$ מקסימום ב. $y = -3x + 3$
9. א. $(4, -32)$ מינימום, $(0, 0)$ מקסימום ב. $(0, 0)$, $(6, 0)$ ג. $y = 36x - 216$, $y = 0$ ד. $(6, 0)$

השלבים בחקירת פולינום ממעלה גבוהה מ 2 דומים לשלבים לחקירת פרבולה.

ההבדל העיקרי הוא מספר נקודות הקיצון.

בפרבולה יש בהכרח נקודת קיצון אחת ואילו עבור פולינום ממעלה גבוהה מ - 2 מספר נקודות הקיצון יכול להשתנות מפונקציה לפונקציה.

שלבי עבודה

שלב 1 : תחום הגדרה

פולינום היא פונקציה שמוגדרת לכל x , בהמשך נלמד על פונקציות שלא מוגדרות לכל x וכדאי להתחיל להתרגל כבר עכשיו לרשום תחום הגדרה של פונקציה.

שלב 2 : נקודות חיתוך עם הצירים

מציבים 0 במקום x ומקבלים נקודת חיתוך עם ציר ה - y .

משווים את הפונקציה לאפס ופתרון המשוואה נותן נקודות חיתוך עם ציר ה - x .

שלב 3 : מציאת נקודת קיצון ותחומי עליה וירידה

שימו לב : לא ניתן לדעת מראש כמה נקודות קיצון יש לפולינום ממעלה גבוהה מ - 2.

שלב 4 : משרטטים את הפונקציה על פי המסקנות שהתקבלו בשלבים הקודמים.

הערה 2

לעיתים נוכל להיעזר בשרטוט כדי לענות על שאלות שקשורות לגרף הפונקציה. שאלה כזאת בד"כ תופיע כסעיף לאחר השרטוט.

דוגמה

נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x$

א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודת הקיצון?

ג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

ד. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בדיוק בשלוש נקודות?

פתרון

א. הפונקציה מוגדרת לכל x .

ב. נגזור ונשווה לאפס

$$f'(x) = 3x^2 + 24x + 36$$

$$3x^2 + 24x + 36 = 0 \quad |:3$$

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

נפתור את המשוואה

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 12}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -6$$

נבנה טבלה ונבדוק את סימני הנגזרת של הפונקציה מימין ומשמאל לכל נקודה

מספרים להצבה	-7		-3		0
x	$x < -6$	$x = -6$	$-6 < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x$
y'	+	0	-	0	+
y	↑	מינימום	↓	מקסימום	↑

$$f'(-7) = 3 \cdot (-7)^2 + 24 \cdot (-7) + 36 > 0$$

$$f'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 24 \cdot (-3) + 36 < 0$$

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 + 36 > 0$$

נקודת מקסימום $x = -2$

נציב בפונקציה ונקבל

$$f(-2) = (-2)^3 + 12 \cdot (-2)^2 + 36 \cdot (-2)$$

$$f(-2) = -32$$

נקודת מקסימום $(-2, -32)$

נקודת מינימום $x = -6$.

נציב בפונקציה ונקבל

$$f(-6) = (-6)^3 + 12 \cdot (-6)^2 + 36 \cdot (-6)$$

$$f(-6) = 0$$

נקודת המינימום $(-6, 0)$.

ג. ניתן להסיק מהטבלה:

הפונקציה עולה כאשר $x < -6$ או $-2 < x$ ויורדת כאשר $-6 < x < -2$.

ד. נמצא חיתוך עם ציר y .

$$f(0) = 0^3 + 12 \cdot 0^2 + 36 \cdot 0$$

$$f(0) = 0$$

נקודת חיתוך עם ציר y : $(0, 0)$

נקודות חיתוך עם ציר x : נשווה את הפונקציה לאפס ונקבל

$$x^3 + 12x^2 + 36x = 0$$

$$x(x^2 + 12x + 36) = 0$$

נשווה כל אחד מהגורמים לאפס ונקבל

$$x = 0$$

$$x^2 + 12x + 36 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}$$

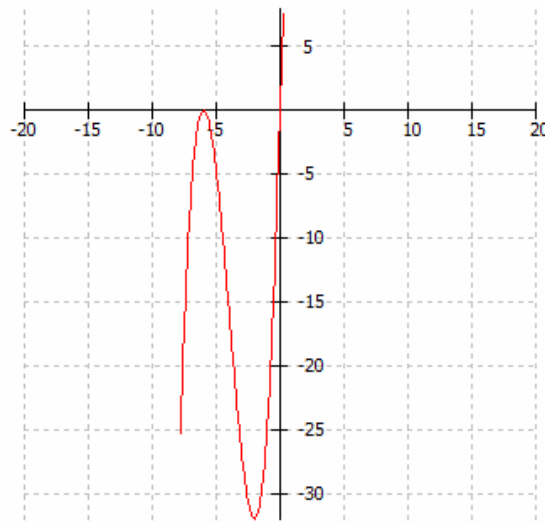
$$x = -6$$

נקודות החיתוך עם ציר ה- x הם $(-6, 0)$ ו- $(0, 0)$.

סה"כ נקודות חיתוך עם הצירים

$(-6, 0)$ ו- $(0, 0)$.

ה.



- ו. מהשרטוט ניתן להסיק שבין נקודת המינימום לנקודת המקסימום הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשלוש נקודות. כלומר: $-32 < k < 0$

תרגילים

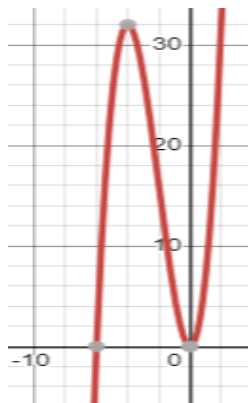
1. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 + 6x^2$
 - א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - ב. מצאו את נקודת הקיצון?
 - ג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
 - ד. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 - ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
 - ו. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה
2. נתונה הפונקציה $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)$
 - א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - ב. מצאו את נקודת הקיצון?
 - ג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
 - ד. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 - ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
 - ו. נתון הישר $y = 5x - 2$
 - i. מצאו את משוואות המשיקים שמקבילים לישר $y = 5x - 2$.
 - ii. שרטטו באותה מערכת צירים את הפונקציה הנתונה, הישר הנתון ושני המשיקים.
3. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^2$
 - א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - ב. מצאו את נקודת הקיצון?
 - ג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
 - ד. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 - ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
 - ו. מצאו את משוואת המשיק בנקודה $(1, 3)$
 - ז. לאילו ערכי k לישר $y = k$ ולגרף הפונקציה יש בדיוק בשתי נקודות משותפות.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודת הקיצון?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה נקודות משותפות יש לפונקציה הנתונה ולישר $y = 1$.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = (x^2 + 1)(x - 2)$.

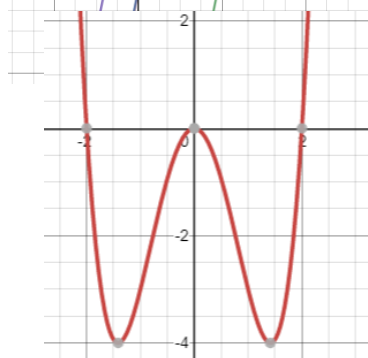
- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודת הקיצון?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- לאילו ערכי x הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה
 - בנקודה אחת.
 - בשתי נקודות.
 - בשלוש נקודות.



- תשובות:
- א. כל x . ב. $(0,0)$ מינימום, $(-4,32)$ מקסימום.
 - ג. עלייה $0 < x < 4$ או $x < -4$ ירידה $-4 < x < 0$.
 - ד. $(0,0)$, $(-6,0)$.
 - ה. תחומי חיוביות $0 < x < 6$ או $-6 < x < 0$ תחומי שליליות $x < -6$.



- א. כל x . ב. $(\frac{5}{3}, -\frac{4}{27})$ מינימום, $(1,0)$ מקסימום. ה. ii.
- ג. עלייה $\frac{5}{3} < x < 1$ או $x < \frac{5}{3}$ ירידה $1 < x < \frac{5}{3}$.
- ד. $(2,0)$, $(1,0)$.
- ה. $y = 5x - 11\frac{13}{27}$, $y = 5x + 2$.



- א. כל x . ב. $(\sqrt{2}, -4)$ מינימום, $(-\sqrt{2}, -4)$ מינימום. ה.
- ג. עלייה $\sqrt{2} < x < 0$ או $-\sqrt{2} < x < 0$.
- ד. $(2,0)$, $(0,0)$, $(-2,0)$.
- ה. $y = -4x + 1$.
- ו. $k = -4$ או $0 < k$.

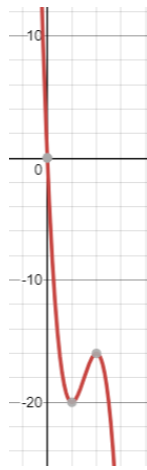
4. א. כל x ב. $(2, -20)$ מינימום, $(4, -16)$ מקסימום ה.

ג. עלייה $2 < x < 4$

ירידה $x < 2$ או $4 < x$

ד. $(0,0)$

ו. 1



5. א. כל x ב. $(1, -2)$ מינימום, $(\frac{1}{3}, -\frac{50}{27})$ מקסימום ה.

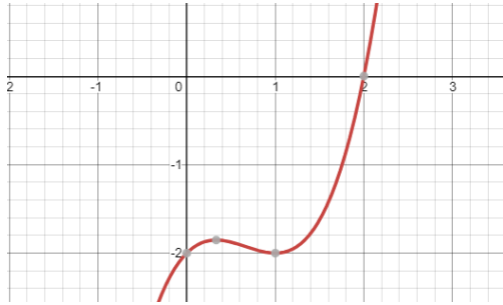
ג. עלייה $x < \frac{1}{3}$ או $1 < x$

ירידה $\frac{1}{3} < x < 1$

ד. $(2,0)$

ו. $k < -2$ או $\frac{-50}{27} < k$ ii $k = -2$ או $k = \frac{-50}{27}$

iii $-2 < k < \frac{-50}{27}$



בעיות קיצון

יישום מציאת נקודות קיצון בבעיות שונות.

דוגמה:

ישנם שני מספרים שסכומם 8, נרצה לדעת מה צריכים להיות שני המספרים כדי שמכפלת האחד מהם בחזקת השלישית של האחר תהיה מקסימלית.

יש אינסוף אפשרויות לקבל שני מספרים שסכומם 8.

למשל:

מספר 8 : 1 מספר 2 : 0

ואז מכפלת הראשון בחזקת השלישית של השני נותן $8 \cdot 0^3 = 0$

מספר 7 : 1 מספר 2 : 1

ואז מכפלת הראשון בחזקת השלישית של השני נותן $7 \cdot 1^3 = 7$

מספר 6 : 1 מספר 2 : 2

ואז מכפלת הראשון בחזקת השלישית של השני נותן $6 \cdot 2^3 = 48$

מספר 5 : 1 מספר 2 : 3

ואז מכפלת הראשון בחזקת השלישית של השני נותן $5 \cdot 3^3 = 135$

מספר 4 : 1 מספר 2 : 4

ואז מכפלת הראשון בחזקת השלישית של השני נותן $4 \cdot 4^3 = 256$

עבור כל אפשרות קיבלנו ערך אחר. מבין כל האפשרויות נרצה לדעת מהי האפשרות שתתן לנו את הערך הגדול ביותר. יש אינסוף אפשרויות, ולכן לא נוכל לרשום את כולם ואז לראות מיהו הערך הגדול ביותר.

ניעזר במציאת נקודות מינימום/מקסימום על מנת לדעת מהם המספרים שעבורם נקבל את הערך הגדול ביותר.

שלבי עבודה בפתרון בעיות קיצון

שלב 1:

סימון אחד מהערכים בשאלה ב x .

שלב 2:

רושמים באמצעות x את מה שביקשו שיהיה מינימלי/מקסימלי ומקבלים פונקציה.

שלב 3:

מוצאים את נקודות הקיצון של הפונקציה שקיבלנו בשלב 2.

שלב 4:

קוראים את השאלה ועונים על מה שביקשו בעזרת התשובה שקיבלנו בשלב 3.

פתרון הדוגמה

שלב 1:

נסמן את המספר שני ב- x .

שימו לב: יכלנו לסמן את המספר הראשון ב- x , אך היינו מקבלים פונקציה יותר מסובכת.

שלב 2:

מספר 1: $8 - x$ מספר 2: x

הפונקציה היא $f(x) = (8 - x) \cdot x^3$

שלב 3:

נמצא את נקודת הקיצון של הפונקציה

$$f(x) = (8 - x) \cdot x^3$$

$$f(x) = 8x^3 - x^4$$

$$f'(x) = 24x^2 - 4x^3$$

$$24x^2 - 4x^3 = 0$$

$$4x^2(6 - x) = 0$$

נשווה כל גורם לאפס ונקבל שתי תשובות

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 6$$

נבנה טבלה ונבדוק את סימני הנגזרת של הפונקציה מימין ומשמאל לכל נקודה

מספרים להצבה	-1		1		7
x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 6$	$x = 6$	$6 < x$
y'	+	0	+	0	-
y	↑	לא קיצון	↑	מקסימום	↓

$$f'(-1) = 24 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1)^3 > 0$$

$$f'(1) = 24 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1^3 > 0$$

$$f'(6) = 24 \cdot 6^2 - 4 \cdot 6^3 < 0$$

שלב 4:

קיבלנו $x = 6$.

מהסימון ראינו ש מספר 1: $8 - x$ מספר 2: x

נציב $x = 6$ ואז נקבל מספר 1: 2 מספר 2: 6

1. הסכום של שני מספרים חיוביים הוא 6.
 - א. סמנו ב- x את המספר הראשון, והביעו באמצעותו את המספר השני.
 - ב. מצאו את הערך של x שעבורו מכפלת שני המספרים תהיה מקסימלית.
 - ג. מהי התוצאה הגדולה ביותר שאפשר לקבל אם כופלים את שני המספרים?
2. הסכום של שני מספרים חיוביים הוא 12.
 - א. סמנו ב- x את המספר הראשון, והביעו באמצעותו את המספר השני.
 - ב. מצאו את הערך של x שעבורו מכפלת שני המספרים תהיה מקסימלית.
 - ג. מהי התוצאה הגדולה ביותר שאפשר לקבל אם כופלים את שני המספרים?
3. הסכום של שלושה מספרים חיוביים הוא 18.
 - המספר השני גדול פי 2 מהמספר הראשון.
 - א. סמנו ב- x את המספר הראשון, והביעו באמצעותו את המספר השלישי.
 - ב. מצאו את הערך של x שעבורו מכפלת שלושת המספרים תהיה מקסימלית.
 - ג. מהי התוצאה הגדולה ביותר שאפשר לקבל אם כופלים את שני המספרים?
4. הסכום של שלושה מספרים חיוביים הוא 24.
 - המספר השני גדול פי 2 מהמספר הראשון.
 - א. סמנו ב- x את המספר הראשון, והביעו באמצעותו את המספר השלישי.
 - ב. מצאו את הערך של x שעבורו מכפלת שלושת המספרים תהיה מקסימלית.
 - ג. מהי התוצאה הגדולה ביותר שאפשר לקבל אם כופלים את שני המספרים?
5. הסכום של שלושה מספרים חיוביים הוא 36.
 - המספר הראשון שווה למספר השני.
 - א. סמנו ב- x את המספר הראשון, והביעו באמצעותו את המספר השלישי.
 - ב. מצאו את הערך של x שעבורו סכום ריבועי שלושת המספרים יהיה מינימלי.
6. הסכום של שני מספרים הוא 6.
 - א. סמנו ב- x את המספר הראשון, והביעו באמצעותו את המספר השני.
 - ב. הביעו באמצעות x את מכפלת המספר השני בריבועו של המספר הראשון וסמנו את התוצאה ב- $f(x)$.
 - ג. מצאו את הערך של x שעבורו מכפלת המספר השני בריבועו של המספר הראשון יהיה מקסימלי.
7. הסכום של שני מספרים הוא 18.
 - א. סמנו ב- x את המספר הראשון, והביעו באמצעותו את המספר השני.
 - ב. הביעו באמצעות x את מכפלת המספר השני בריבועו של המספר הראשון וסמנו את התוצאה ב- $f(x)$.
 - ג. מצאו את הערך של x שעבורו מכפלת המספר השני בריבועו של המספר הראשון יהיה מקסימלי.
 - ד. מהו הערך המקסימלי שמתקבל?

8. הסכום של שני מספרים הוא 8.

- א. סמנו ב- x את המספר הראשון, והביעו באמצעותו את המספר השני.
ב. הביעו באמצעות x את מכפלת המספר השני בחזקה השלישית של המספר הראשון וסמנו את התוצאה ב- $f(x)$.
ג. מצאו את הערך של x שעבורו מכפלת המספר השני בחזקה השלישית של המספר הראשון מקסימלית.
ד. מהו הערך המקסימלי שמתקבל?

9. ההפרש בין שני מספרים הוא 12.

- א. סמנו ב- x את המספר הראשון, והביעו באמצעותו את המספר השני.
ב. מצאו את הערך של x שעבורו מכפלת שני המספרים תהיה מינימלית.
ג. מהי התוצאה הקטנה ביותר שאפשר לקבל אם כופלים את שני המספרים?

10. ההפרש בין שני מספרים הוא 18.

- א. סמנו ב- x את המספר הראשון, והביעו באמצעותו את המספר השני.
ב. מצאו את הערך של x שעבורו מכפלת שני המספרים תהיה מינימלית.
ג. מהי התוצאה הקטנה ביותר שאפשר לקבל אם כופלים את שני המספרים?

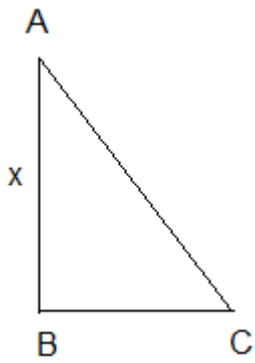
11. נתונים שני מספרים x ו- y , המקיימים $x + 3y = 12$.

- א. הביעו את y באמצעות x .
ב. הביעו באמצעות x את המכפלה xy .
ג. מצאו את שני המספרים x ו- y , המקיימים $x + 3y = 12$ ומכפלתם מקסימלית.

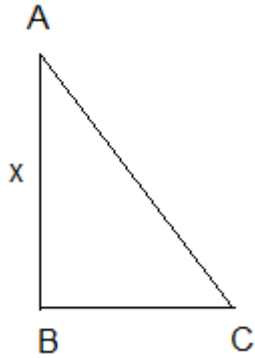
12. נתונים שני מספרים x ו- y , המקיימים $x + 4y = 17$.

- א. הביעו את y באמצעות x .
ב. הביעו באמצעות x את המכפלה xy .
ג. מצאו את שני המספרים x ו- y , המקיימים $x + 4y = 17$ ומכפלתם מקסימלית.

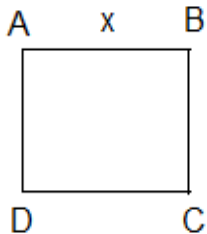
תשובות: 1. א. $6 - x$ ב. 3 ג. 9 2. א. $12 - x$ ב. 6 ג. 36 3. א. $18 - 3x$ ב. 4 ג. 192 4. א. $24 - 3x$ ב. $5\frac{1}{3}$ ג.
5. $455\frac{1}{9}$ א. $36 - 2x$ ב. 12 ג. 6 א. $6 - x$ ב. $6x^2 - x^3$ ג. 4 א. $18 - x$ ב. $18x^2 - x^3$ ג. 12 ד. 864 א. 8 - 8
א. x ב. $8x^3 - x^4$ ג. 6 ד. 432 א. $12 + x$ ב. -6 ג. -36 א. $18 + x$ ב. -9 ג. -81
11. א. $\frac{-x+12}{3}$ ב. $\frac{-x^2+12x}{3}$ ג. $x = 6, y = 2$ 12. א. $\frac{-x+17}{4}$ ב. $\frac{-x^2+17x}{4}$ ג. $x = 8\frac{1}{2}, y = 2\frac{1}{8}$



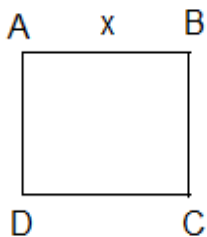
1. סכום אורכי הניצבים במשולש ישר זווית ABC הוא 18 ס"מ.
 נסמן ב- x את אורך הניצב AB .
 א. הביעו באמצעות x את אורך הניצב BC .
 ב. הביעו באמצעות x את שטח המשולש ABC .
 ג. מה צריך להיות x כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



2. סכום אורכי הניצבים במשולש ישר זווית ABC הוא 36 ס"מ.
 נסמן ב- x את אורך הניצב AB .
 א. הביעו באמצעות x את אורך הניצב BC .
 ב. הביעו באמצעות x את שטח המשולש ABC .
 ג. מה צריך להיות x כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?
 ד. עבור x שמצאתם חשבו את היקף המשולש.



3. היקף מלבן $ABCD$ שווה 20 ס"מ.
 נסמן ב- x את אורך הצלע AB .
 א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע BC .
 ב. הביעו באמצעות x את שטח המלבן $ABCD$.
 ג. מה צריך להיות x כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

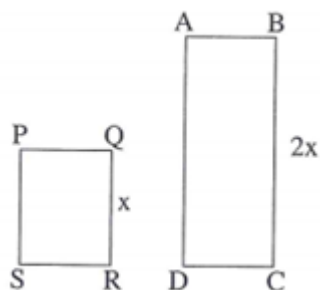


4. היקף מלבן $ABCD$ שווה 10 ס"מ.
 נסמן ב- x את אורך הצלע AB .
 א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע BC .
 ב. הביעו באמצעות x את שטח המלבן $ABCD$.
 ג. מה צריך להיות x כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?
 ד. עבור x שמצאתם חשבו את אורך האלכסון BD .

5. חצר מלבנית סמוכה בצדה האחד לבית מגורים.
 מגדרים את החצר ללא הצלע שסמוך לבית.
 אורך הגדר 60 מטר.



- נסמן ב- x את אורך החזית.
 א. הביעו באמצעות x את אורך צידו של הגדר.
 ב. הביעו באמצעות x את שטח החצר.
 ג. מה צריך להיות x כדי ששטח החצר יהיה מקסימלי?
 ד. מהו השטח המקסימלי של החצר?



6. נתונים שני מלבנים $ABCD$ ו- $PQRS$ (ראה ציור).

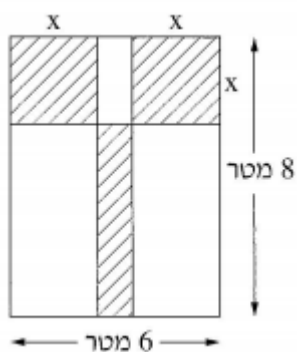
נתון: $AB + BC = 30$ ס"מ

$$AB = PQ, \quad QR = x, \quad BC = 2x$$

א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע AB .

ב. הביעו באמצעות x את סכום שטחי המלבנים.

ג. מה צריך להיות x כדי שסכום שטחי המלבנים יהיה מקסימלי?



7. נתונה גינת נוי שצורתה מלבן.

ממדי המלבן הם 8 מטרים ו-6 מטרים (ראה ציור).

רוצים לשתול דשא בשטחים המקווקוים שבציור:

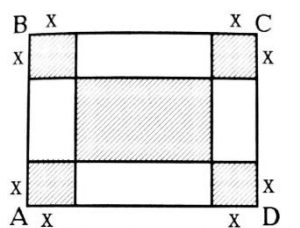
שני שטחים הם בצורת ריבועים זהים,

ושטח אחד הוא בצורת מלבן, כמתואר בציור.

נסמן ב- x את אורך הצלע של הריבועים.

א. הביעו באמצעות x את כל השטח המקווקו בציור.

ב. מה צריך להיות x , כדי שהשטח של הדשא יהיה מינימלי?



8. בבית ספר יש חלון מלבני, שמידותיו הן 42 ס"מ ו-28 ס"מ.

מרכיבים זכוכית משני סוגים זכוכית צבעונית וזכוכית שקופה.

השטחים האפורים שבציור מסמנים זכוכית צבעונית

והשטחים הלבנים מסמנים זכוכית שקופה.

א. מה צריך להיות ערכו של x , כדי ששטח הזכוכית

הצבעונית יהיה מינימלי?

ב. מהו השטח המינימלי?

9. במלבן $ABCD$ נתון:

$$AB = DC = 10 \text{ ס"מ}$$

$$AD = BC = 6 \text{ ס"מ}$$

על צלעות המלבן הקצו קטעים שווים:

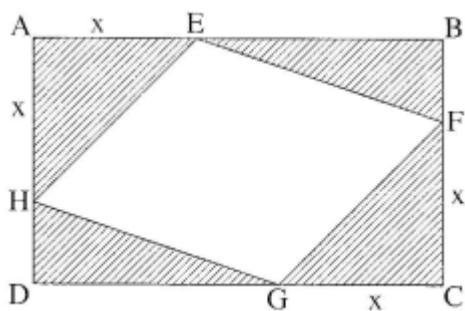
$$AE = AH = CF = CG = x$$

ונוצרו ארבעה משולשים ששטחם מקווקו בציור.

א. הביעו באמצעות x את כל השטח המקווקו בציור.

ב. מה צריך להיות x , כדי שהשטח המקווקו יהיה מינימלי?

ג. חשבו את השטח המרובע $EFGH$ כאשר השטח המקווקו הוא מינימלי.



10. נתון מלבן $ABCD$ כך ש $AB = DC = 8$ ס"מ, $AD = BC = 3$ ס"מ.

על צלעות המלבן הקצו קטעים שווים:

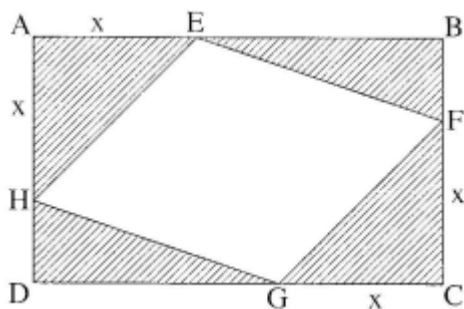
$$AE = AH = CF = CG = x$$

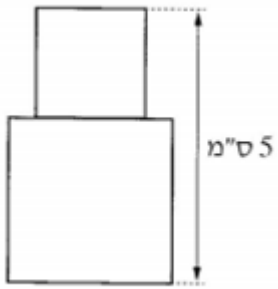
א. הביעו באמצעות x את כל השטח המקווקו בציור.

ב. הביעו באמצעות x את שטח המרובע $EFGH$.

ג. מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח

המרובע $EFGH$ יהיה מקסימלי?

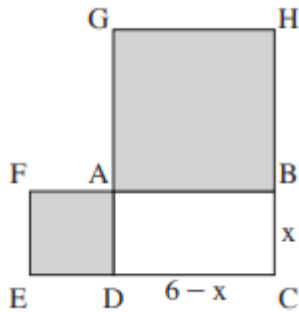




11. נתונה צורה המורכבת משני ריבועים המונחים זה על זה גובה הצורה הוא 5 ס"מ (ראה ציור).

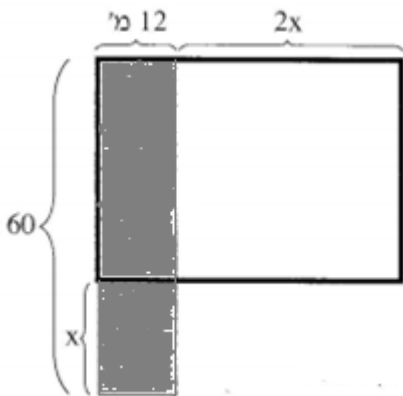
- סמנו ב- x את אורך הצלע של הריבוע התחתון והביעו באמצעות x את אורך הצלע של הריבוע העליון.
- מצאו מה צריך להיות x , כדי ששטח הצורה יהיה מינימלי.
- חשבו את השטח המינימלי של הצורה.

12. $ABCD$ הוא מלבן שסכום שתי צלעות סמוכות שלו הוא 6 ס"מ. על הצלעות AB ו- AD של המלבן בנו את הריבועים $ADEF$ ו- $AGHB$,



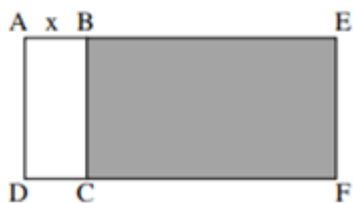
כמתואר בסרטוט. נסמן: $BC = x$.

- מצאו את אורך הצלע BC שבעבורו סכום שטחי הריבועים הוא מינימלי (השטחים האפורים בסרטוט).
- עבור אורך הצלע BC שמצאתם בסעיף א', חשבו את אורך האלכסון BD .



13. נתון מלבן שרוחבו 12 מטרים

- ואורכו 60 מטרים (המלבן האפור בציור). הוסיפו לרוחבו של המלבן $2x$ מטרים, והפחיתו מאורכו x מטרים, ונוצר מלבן חדש.
- הביעו באמצעות x את שטח המלבן החדש (המלבן המודגש בציור).
- עבור איזה ערך של x יתקבל מלבן חדש ששטחו מקסימלי?



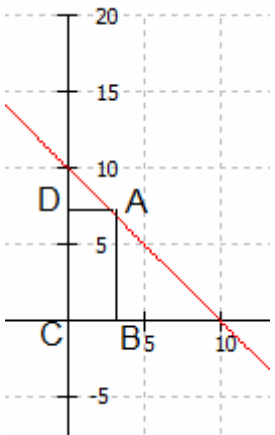
14. נתון מלבן $ABCD$ שהיקפו הוא 36 ס"מ.

נסמן ב- x את אורך הצלע AB .

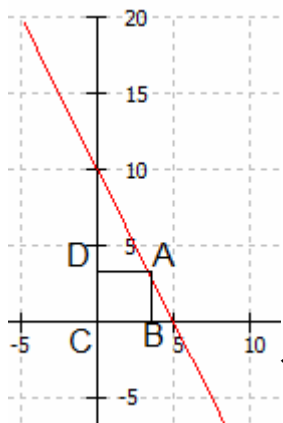
- הבע באמצעות x את אורך הצלע BC .
- על הצלע BC בנו מלבן נוסף $BEFC$ (המלבן האפור בציור). אורך הצלע BE גדול פי 4 מאורך הצלע AB .
- הבע באמצעות x את שטח המלבן $BEFC$.
- מצא עבור איזה ערך של x שטח המלבן $BEFC$ הוא מקסימלי.

- תשובות: 1. א. $18 - x$ ב. $\frac{18x - x^2}{2}$ ג. 9 ד. א. $36 - x$ ב. $\frac{36x - x^2}{2}$ ג. 18 ד. 61.46 3. א. $10 - x$ ב. $10x - x^2$ ג. 5 ד. 4
- א. $5 - x$ ב. $5x - x^2$ ג. 2.5 ד. 3.54 5. א. $\frac{60 - x}{2}$ ב. $\frac{60x - x^2}{2}$ ג. 30 ד. 450 6. א. $30 - 2x$ ב. $3x^2 - 16x + 60$ ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 563
7. א. $90x - 6x^2$ ג. 7.5 ד. $4x^2 - 22x + 48$ 8. א. $8\frac{3}{4}$ ב. $2\frac{3}{4}$ ג. $2x^2 - 11x + 24$ ד. $-2x^2 + 11x$ 9. א. $563\frac{1}{2}$ ב. $8\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{3}$ ד. $21\frac{1}{3}$
10. א. $2x^2 - 11x + 24$ ב. $2x^2 - 11x$ ג. $2\frac{3}{4}$ ד. $-2x^2 + 11x$ 11. א. $5 - x$ ב. 2.5 ג. 12.5 ד. 3 12. א. 3 ב. 4.24 13. א. $-2x^2 + 108x + 720$ ב. 27 ד. 18 - x 14. א. $72x - 4x^2$ ב. ii. 9

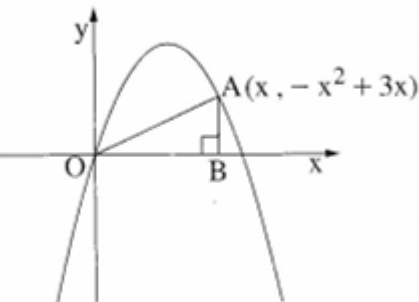
בעיות בפונקציות וגרפים



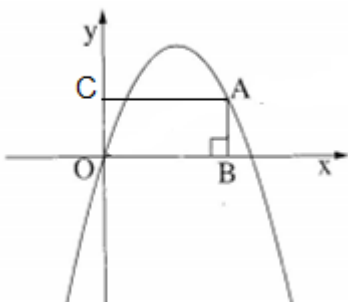
1. נקודה A נמצאת ברביע הראשון על ישר שמשוואתו $y = -x + 10$.
 דרך הנקודה A מעבירים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן $ABCD$ (ראו בציור).
 נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה A .
 א. הביעו באמצעות x את האורך של CB ואת האורך של AB .
 ב. הביעו באמצעות x את שטח המלבן $ABCD$.
 ג. מצאו מה צריך להיות x , כדי ששטח המלבן $ABCD$ יהיה מקסימלי.
 ד. מצאו את השטח המקסימלי של המלבן $ABCD$.



2. נקודה A נמצאת ברביע הראשון על ישר שמשוואתו $y = -2x + 10$.
 דרך הנקודה A מעבירים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן $ABCD$ (ראו בציור).
 נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה A .
 א. הביעו באמצעות x את האורך של CB ואת האורך של AB .
 ב. הביעו באמצעות x את שטח המלבן $ABCD$.
 ג. מצאו מה צריך להיות x , כדי ששטח המלבן $ABCD$ יהיה מקסימלי.
 ד. מצאו את השטח המקסימלי של המלבן $ABCD$.



3. נקודה A נמצאת ברביע הראשון על פרבולה שמשוואתה $y = -x^2 + 3x$.
 דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה- x החותך את הציר בנקודה B .
 נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה A .
 א. הביעו באמצעות x את האורך של OB ואת האורך של AB .
 ב. מצאו מה צריך להיות x , כדי ששטח המשולש ABO יהיה מקסימלי.
 ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש ABO .



4. נקודה A נמצאת ברביע הראשון על פרבולה שמשוואתה $y = -2x^2 + 9x$.
 נסמן את ראשית הצירים ב- O .
 דרך הנקודה A מעבירים אנכים לצירים, כך שנוצר מלבן $ABOC$.
 נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה A .
 א. הביעו באמצעות x את האורך של OB ואת האורך של AB .
 ב. מצאו מה צריך להיות x , כדי ששטח המלבן $ABOC$ יהיה מקסימלי.
 ג. מצאו את השטח המקסימלי של המלבן $ABOC$.

5. נקודה A נמצאת ברביע הראשון על פרבולה

$$y = -2x^2 + 9x$$

שמשוותה $y = 0$. נסמן את ראשית הצירים ב- O .

דרך הנקודה A מעבירים אנכים לצירים, כך שנוצר מלבן $ABOC$.

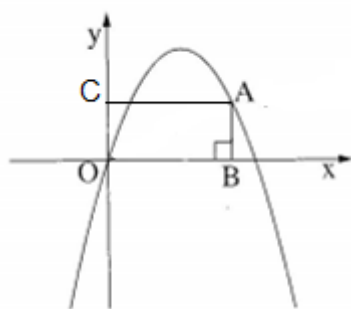
נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה A .

א. הביעו באמצעות x את האורך של OB

ואת האורך של AB .

ב. מצאו מה צריך להיות x , כדי שהיקף המלבן $ABOC$ יהיה מינימלי.

ג. מצאו את ההיקף המינימלי של המלבן $ABOC$.



6. נתונה הפונקציה $f(x) = -0.5x^2 + 1$

$$y = -x + 2$$

ונתון הישר $y = -x + 2$. הנקודה A נמצאת על הישר,

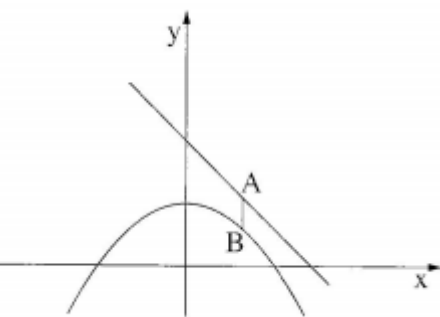
והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y (ראה ציור).

א. מה צריך להיות שיעור ה- x של A ,

כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי?

ב. מצאו את האורך המינימלי של הקטע AB .



תשובות: 1. א. x , ב. $-x + 10$, ג. $-x^2 + 10x$, ד. 25, 5. 2. א. x , ב. $-2x + 10$, ג. $-2x^2 + 10x$, ד. $2\frac{1}{2}$, 6. 3. א. x , ב. $-x^2 + 3x$, ג. 2, ד. 2, 5. 4. א. x , ב. $-2x^2 + 9x$, ג. 27, 3. 5. א. x , ב. $-2x^2 + 9x$, ג. $2\frac{1}{2}$, 25. 6. א. 1, ב. $\frac{1}{2}$.